# 1.5 Permutaties en combinaties

## Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met systematisch tellen, zowel met behulp van diagrammen als met behulp van machten en faculteiten. De termen ‘variaties’ en ‘permutaties’ zijn al voorbij gekomen. Het aantal variaties van 3 uit 8 is het aantal manieren om drie verschillende elementen uit een totaal van 8 te halen. Maar vaak heb je niet allemaal verschillende elementen, maar groepjes dezelfde elementen. Daar gaat het nu over.

**Je leert in dit onderwerp**

- onderscheid maken tussen permutaties, variaties en combinaties;
- het aantal combinaties van $r$ uit $n$ elementen berekenen;
- kunnen werken met de driehoek van Pascal.

**Voorkennis**

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en faculteiten toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- het aantal variaties van $r$ uit $n$ elementen berekenen;
- werken met kansen.

## Verkennen

### Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Ga ervan uit dat hun volgorde van aankomst uitsluitend van het toeval afhangt.

**a** Op hoeveel manieren kunnen deze acht hardlopers als eerste, als tweede en als derde aankomen?

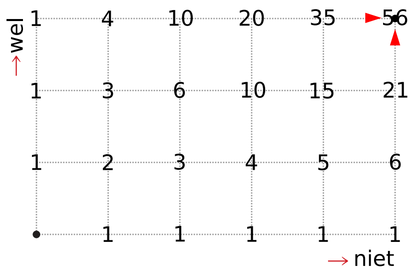
**b** De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

## Uitleg

Bij de Olympische Spelen is de 100 m hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten 8 lopers, zeg A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver of brons. Ga er vanuit dat alle lopers gelijkwaardig zijn. Je weet het aantal volgordes waarin alle hardlopers over de finish kunnen komen, permutaties dus: 8!.
Hoeveel mogelijke lijstjes met drie medaillewinnaars kun je maken?

Het gaat hier om het aantal volgordes van 3 uit 8 waarbij de uiteindelijke volgorde van belang is: $8 \cdot 7 \cdot 6 = {}_8P_3 = 336$ mogelijkheden.

Maar in de voorrondes van de Spelen is het niet belangrijk of je nummer 1, nummer 2 of nummer 3 bent: de eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De lijstjes BDG, BGD, DBG, GBD, DGB en GDB hebben dan allemaal hetzelfde resultaat. Dat zijn er 6 in totaal. Die tellen dan dus niet als afzonderlijke mogelijkheden, maar vormen samen één mogelijkheid. En dat geldt ook voor alle andere drietallen: de volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en die 6 (dus 3!) volgordes tellen telkens maar als één mogelijkheid mee. Dit betekent dat er geen 336 mogelijke lijstjes zijn, maar slechts 336 gedeeld door 3!, dus 56.




**Figuur 1**

Dat kun je heel mooi weergeven in een rooster van 3 bij 5. Elk element van de groep van 8 hoort dan wel of niet bij het uitverkoren drietal.

Je stelt je dan voor dat je alle 8 hardlopers bij langs loopt en beslist of je hem/haar uitkiest, waarbij je er 3 kiest en 5 niet. Op hoeveel manieren kun je dit doen?

Dat tel je in het rooster als volgt: Het aantal routes dat in een punt bij elkaar komt is telkens het aantal routes dat in het punt eronder en het aantal routes dat in het punt er links naast, bij elkaar komt. Het is de som van de routes van de twee voorgangers.
Dat komt omdat je alleen naar rechts en omhoog mag bewegen over de roosterlijnen, omdat je anders meer dan 8 beslissingen neemt. Het aantal mogelijke (kortste) routes van linksonder naar rechtsboven is gelijk aan het aantal groepjes van 3 uit 8. En dat zijn inderdaad 56 combinaties.

### Opgave 1

Bekijk de **Uitleg** over het wel/niet rooster.

**a** Bereken zelf op deze manier het aantal groepen van 4 dat je uit 9 deelnemers kunt samenstellen en controleer je antwoord met een berekening.

**b** Je mag 3 kleuren mag kiezen uit de beschikbare 100 kleuren verf. Op hoeveel manieren kan dit?

### Opgave 2

Bekijk nog een keer de **Uitleg**.

**a** Maak zelf een rooster voor het aantal besturen van 4 leden die je uit 6 kandidaten kunt samenstellen.

**b** Bereken met faculteiten het aantal besturen van 4 leden uit 6 kandidaten.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* kiest uit 8 *verschillende* elementen en van de gekozen elementen is de *volgorde belangrijk*, dan heb je

$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = {}_8\mathrm{P}_3 = 336$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **permutaties** van $r$ uit $n$ elementen is: ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Als de volgorde van de gekozen elementen er niet toe doet, zijn er minder mogelijke uitkomsten. Bij 2 gekozen elementen is het aantal mogelijke uitkomsten een factor 2 kleiner, bij 3 gekozen elementen een factor 3! = 6, bij 4 gekozen elementen een factor 4! = 24, en zo voort.

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* kiest uit 8 *dezelfde of (gedeeltelijk) verschillende* elementen en van de gekozen elementen is de *volgorde niet belangrijk*, dan heb je

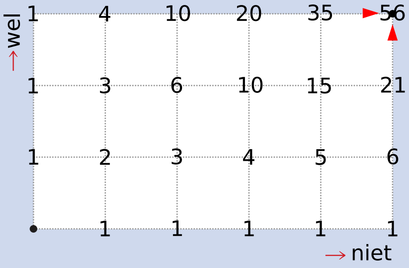
$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{3!} = 336 \cdot \frac{1}{6} = 56$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: het aantal **combinaties** van $r$ uit $n$ elementen is: ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Het aantal combinaties van 3 uit 8 wordt ook geschreven als $\binom{8}{3}$ en uitgesproken als ‘ 8 boven 3’.

Combinaties kun je ook anders bekijken. Bij het aantal combinaties van 3 uit 8 gaat het er eigenlijk om de groep van 8 te verdelen in twee subgroepen, één van 3 en één van 5. Er geldt dus ${}_8C_3 = {}_8C_5$ en algemener: ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.




**Figuur 2**

Je kunt het aantal combinaties ook berekenen met een wel/niet rooster. Het aantal kortste routes naar het punt (5,3) tel je vanuit het punt linksonder naar het punt rechtsboven door het aantal routes vanaf ieder eerder gepasseerd punt op te tellen: 56.

Berekening geeft: ${}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56$.

Bekijk in het **Practicum** hoe dit met je grafische rekenmachine gaat.

Een wel/niet rooster is een gedraaide versie van de **driehoek van Pascal**. In de driehoek van Pascal is elk getal de som van de twee getallen daar schuin boven.

## Voorbeeld 1

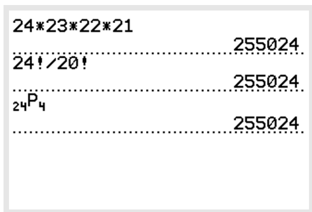
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van 4 personen samengesteld. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot van belang: ben je als eerste ingeloot dan heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, derde of vierde wordt ingeloot.

Het gaat nu dus om het aantal variaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{24!}{(24;-;4;);!} = \frac{24!}{20!} = 255024$ mogelijkheden.




**Figuur 3**

## Opgave 3

Je hebt een groep van 20 personen; 8 mannen en 12 vrouwen.

Uit de groep van 20 worden door loting vijf personen aangewezen. Elk van hen krijgt een andere opdracht. Op hoeveel manieren kunnen de opdrachten verdeeld worden?

## Voorbeeld 2

In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van 4 personen gekozen. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

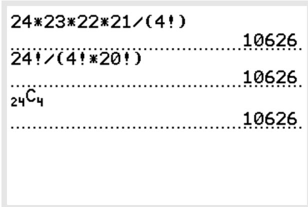
Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot niet van belang: ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat nu dus om het aantal combinaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom

$\binom{24}{4} = \frac{24!}{4! \cdot (24-4)!} = \frac{24!}{4! \cdot 20!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$ mogelijkheden.



Figuur 4

### Opgave 4

Je hebt een groep van 20 personen, 8 mannen en 12 vrouwen.

Uit de groep van 20 worden door loting vijf personen gehaald. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht. Op hoeveel manieren kan dat als ze de opdrachten na de loting onderling verdelen?

### Opgave 5

Ga uit van een systeem met 7 schakelaars die allemaal 'aan' of 'uit' kunnen staan.

**a** Geef in een roosterdiagram alle mogelijkheden weer.

**b** Zet bij elk punt van het rooster hoeveel kortste routes ernaartoe leiden. Gebruik de driehoek van Pascal.

**c** Op hoeveel manieren kun je 0 van de 7 schakelaars aanzetten?

**d** Op hoeveel manieren kun je 1 van de 7 schakelaars aanzetten?

**e** Op hoeveel manieren kun je 2 van de 7 schakelaars aanzetten?

**f** Het aantal manieren om 3 van de 7 schakelaars aan te zetten is gelijk aan het aantal manieren om er 4 van de 7 aan te zetten. Leg uit waarom dat zo is.

### Opgave 6

Stel je voor dat er 30 schakelaars zijn (die 30 toneellampen bedienen), waarmee je de belichting op een podium kunt regelen. Voor een bepaalde scène moeten er vier van de 30 worden aangezet. Neem eerst aan dat de volgorde waarin ze worden aangezet wel van belang is.

**a** Op hoeveel manieren kun je vier schakelaars kiezen?

**b** Je moet voor een bepaalde scène de schakelaars $S5$, $S7$, $S8$ en $S9$ gebruiken. Op hoeveel verschillende volgordes kun je die schakelaars nog 'aan' zetten?

**c** Hoe kun je met behulp van de antwoorden op de vragen bij a en b berekenen op hoeveel manieren je vier schakelaars uit de 30 kunt kiezen als de volgorde niet belangrijk is?

**d** Op hoeveel manieren kun je 6 schakelaars kiezen uit de 30 als de volgorde niet belangrijk is?

## Voorbeeld 3

Uit een groepje van 3 meisjes en 6 jongens kies je door loting een vijftal.
Hoe groot is de kans dat daar minstens 2 meisjes bij zijn?

Antwoord

Minstens 2 meisjes wil zeggen 2 of 3 meisjes in een groep van 5 (er zijn namelijk maximaal 3 meisjes).

Precies 2 meisjes kiezen geeft $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3} = 60$ mogelijkheden. Naast de 2 meisjes heb je namelijk ook nog 3 jongens nodig.

Precies 3 meisjes kiezen geeft $\binom{3}{3} \cdot \binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden. Naast de 3 meisjes heb je namelijk ook nog 2 jongens nodig.

Een vijftal kiezen met minstens 2 meisjes geeft dus 75 mogelijkheden.

Je kunt je deze keuzes voorstellen door middel van routes in een rooster. Het kiezen van een meisje zou je kunnen zien als de keuze 'wel' en het kiezen van een jongen als de keuze 'niet' (of omgekeerd).

In totaal kies je 5 mensen uit 9: dat zijn $\binom{9}{5} = 126$ mogelijkheden.

De kans op minstens 2 meisjes als je 5 mensen kiest, is dan ook: $\frac{75}{126} = \frac{25}{42}$

### Opgave 7

Gegeven is een groep van 20 mensen: 8 mannen en 12 vrouwen.

**a** Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit 3 mannen en 2 vrouwen?

**b** Wat is de kans op een groep van vijf, bestaande uit 3 mannen en 2 vrouwen?

**c** Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens 3 mannen?

### Opgave 8

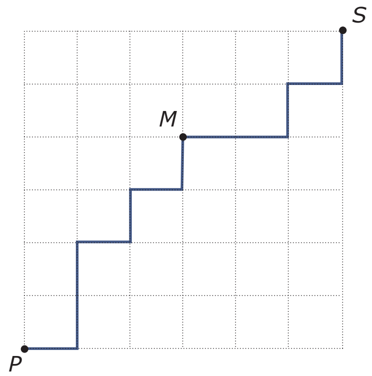
Gebruik de driehoek van Pascal in dit roosterdiagram.

**a** Hoeveel kortste routes zijn er van $P$ naar $M$?

**b** Hoeveel kortste routes zijn er van $M$ naar $S$?

**c** Hoeveel kortste routes zijn er van $P$ naar $S$ via $M$?

**d** Je kunt van linksboven naar rechtsonder een diagonaal tekenen. Daarop liggen 7 punten. Bereken hoeveel manieren er zijn om deze punten te bereiken. Kun je dat ook sneller uitrekenen en waarom?




Figuur 5

## Verwerken

### Opgave 9

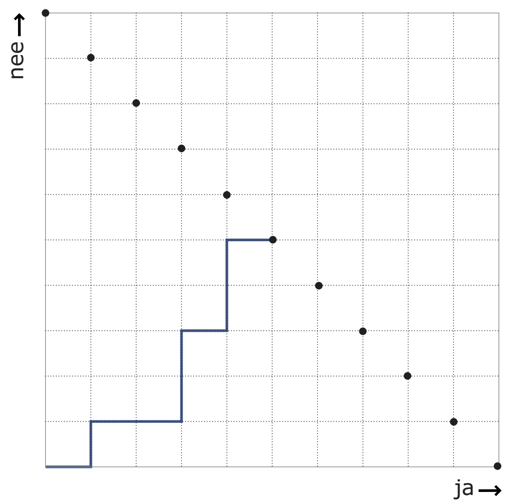
Iemand moet 10 vragen met 'ja' of 'nee' beantwoorden. In de figuur is een mogelijke lijst antwoorden in een rooster weergegeven met behulp van een lijn. Je ziet dat op vraag 1 'ja' geantwoord is, de lijn is horizontaal.

**a** Wat is bij die lijst het antwoord op vraag 6?

**b** Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer 'ja'?

**c** Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

**d** Hoe groot is de kans dat je alle vragen goed beantwoordt als je dat volledig op de gok doet?




**Figuur 6**

### Opgave 10

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus elke deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kan nu worden berekend met behulp van combinaties.

Leg uit waarom dat zo is en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

### Opgave 11

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren 'kop'.

**a** Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

**b** Hoeveel mogelijke antwoorden met precies twee keer 'kop' zijn er?

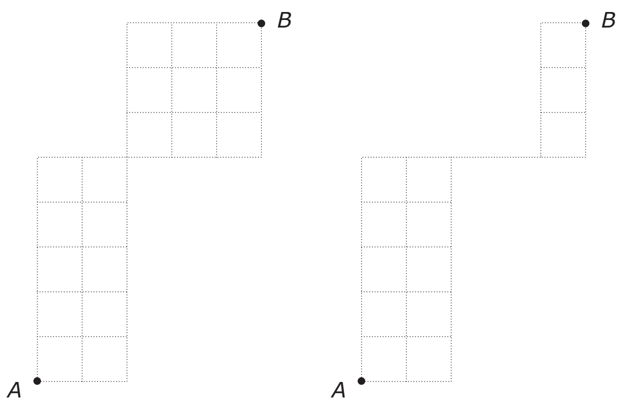
**c** Hoe groot is de kans op precies twee keer 'kop'?

Je gooit nu met 50 geldstukken.

**d** Hoe groot is de kans op 20 keer 'kop'? Rond af op drie cijfers achter de komma.

### Opgave 12

Hoeveel kortste routes zijn er in deze roosters van punt $A$ naar punt $B$?




**Figuur 7**

### Opgave 13

Een groep bestaat uit 14 meisjes en 12 jongens. Er wordt een groepje van vier door loting uitgekozen.

**a** Als het groepje uitsluitend uit meisjes moet bestaan, hoeveel verschillende groepjes zijn er dan mogelijk?

**b** Beantwoord dezelfde vraag als het groepje uit twee jongens en twee meisjes moet bestaan.

### Opgave 14

Een groep vrienden houdt een filmavond. Ze zijn fans van drie genres films, en hebben uit die genres aardig wat films om te kiezen. Om precies te zijn: 29 Godzillafilms, 5 comedies, en 12 tekenfilms.
Ze kiezen drie films uit. Hieronder staan verschillende voorwaarden, bereken telkens het aantal mogelijke drietallen.

**a** Het maakt niet uit uit welk van de drie groepen de films komen, of in welke volgorde ze gekeken worden, er worden gewoon drie gekozen.

**b** Er wordt uit elk genre een film gekeken, maar het maakt niet uit in welke volgorde.

**c** Er worden twee Godzillafilms gekeken en een willekeurige derde van een ander genre, en het maakt wel uit in welke volgorde.

**d** Er worden ofwel drie Godzillafilms, ofwel drie comedies, ofwel drie tekenfilms gekeken, maar in elk geval wordt dan wel het willekeurige drietal gesorteerd op volgorde van jaartal. Ga er hier van uit dat er per groep niet meerdere films uit hetzelfde jaar komen.

### Opgave 15

Je wilt acht verschillende boeken op een boekenplank sorteren.
Op hoeveel manieren kun je de boeken neerzetten als geldt:

**a** Iedere volgorde is toegestaan.

**b** De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

**c** De twee woordenboeken moeten op het rechtereind van de rij naast elkaar staan.

**d** Er worden drie boeken uitgekozen om te worden gekaft en dan naast elkaar aan een uiteinde te worden gezet. (Gekafte boeken beschouwen we niet als onderling verschillend.)

## Toepassen

### Opgave 16: Het binomium van Newton

Het ‘binomium van Newton’ is een belangrijke stelling die zegt dat iedere term van de vorm $(a+b)^n$ herleid kan worden tot:

$$\binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Dus bijvoorbeeld is $(a+b)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a + b$;

$(a+b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
enzovoort.

In deze opgave ga je Newton's binomium een beetje onderzoeken.

**a** Schrijf $(a+b)^3$ uit op de ‘oude’ manier (door haakjes weg te werken).

**b** Gebruik nu het binomium van Newton om $(a+b)^3$ uit te schrijven.

**c** We gaan de algemene stelling gevoelsmatig aantonen. Je hebt drie muntjes, ieder met de letters ‘a’ en ‘b’ aan weerszijden. Je werpt alle muntjes en bekijkt wat er bovenkomt. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

**d** Ervan uitgaande dat de volgorde niet uitmaakt, welke mogelijkheden zijn er?

**e** Bij de mogelijkheden van c, hoeveel volgordes zijn er per mogelijkheid?

**f** Formuleer op grond van je antwoorden bij c, d en e een verklaring voor het binomium van Newton voor algemene $n$.

## Testen

### Opgave 17

Een volleybalteam bestaat uit 12 spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en op welke van de zes posities in het veld.

**a** Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

**b** Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

### Opgave 18

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

**a** Op hoeveel manieren kun je al die leerlingen op een rij zetten?

**b** Op hoeveel manieren kun je 5 van de 26 leerlingen op een rij zetten?

**c** Op hoeveel manieren kun je een groepje van 5 uit de 26 kiezen?

**d** Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen als daar precies twee meisjes in moeten voorkomen?

**e** Er zitten nog steeds tien meisjes in deze klas. Wat is de kans om hoogstens vier meisjes te kiezen als je een groepje van vijf leerlingen maakt. Rond af op drie cijfers achter de komma.

### Opgave 19

Je werpt met drie dobbelstenen en let op het aantal ogen dat boven komt.

**a** Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

**b** Je kunt op verschillende manieren 12 ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal 4 te gooien, maar ook door een 6 en tweemaal 3 te gooien.
Bereken bij elke mogelijkheid de bijbehorende kans.

## Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en tellen met de TI84**
- **Simulaties en tellen met de TInspire**
- **Simulaties en tellen met de Casio**
- **Simulaties en tellen met de HP Prime**
- **Simulaties en tellen met de NumWorks**