

1.3 Systematisch tellen

Inleiding

Bij het beredeneren van kansen speelt het tellen een belangrijke rol. Immers je deelt het aantal 'gunstige' mogelijkheden door het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel weten hoeveel mogelijkheden er zijn en vaak ook nog welke dat zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen moet je systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren bij experimenten met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- boomdiagram, wegendiagram en venndiagram gebruiken om gebeurtenissen in kaart te brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier geldstukken op tafel.

Hoe groot is de kans dat je drie keer kop en één keer munt, of drie keer munt en één keer kop krijgt?



Figuur 1

Uitleg 1

Bij tossen wordt er met een geldstuk geworpen. Het werpen met een geldstuk heeft de uitkomsten kop of munt. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk:

de kans op kop (of de kans op munt) is $\frac{1}{2}$.

Gooi je met meerdere munten dan kun je kijken naar het aantal keren kop. Dat aantal kun je aangeven met X . Gooi je met vier munten dan kan X de waarden 0, 1, 2, 3 of 4 hebben.

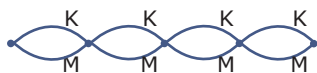
Om de bijbehorende kansen te kunnen berekenen, moet je het aantal gunstige en het totaal aantal uitkomsten overzichtelijk bijhouden. Dat kun je doen met een boomdiagram zoals dit.

Alle zestien uitkomsten hebben dezelfde kans.

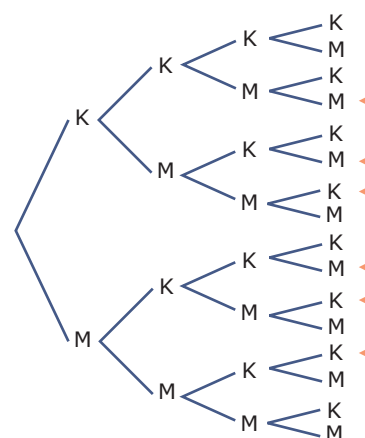
Ga na, dat $P(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Een boomdiagram maken kan veel werk zijn, maar in veel gevallen hoef je maar een klein stukje te tekenen om te zien hoe je de kansen berekent.

Je kunt soms een wegendiagram maken. Daarin zie je snel dat er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden in totaal zijn. Alleen zijn de gunstige mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 3



Figuur 2

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**.

- a Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?
- b Wanneer is een boomdiagram makkelijker, en wanneer een wegendiagram?

Opgave 2

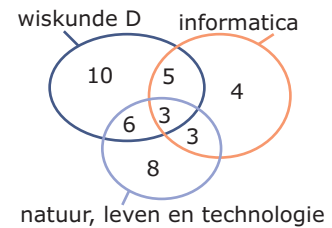
Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt die kaartjes er aselekt één voor één uit.

Bereken de kans dat je dit in de volgorde A-B-C-D doet.

Uitleg 2

Als leerlingen een vakkenpakket kiezen, kun je dat bekijken als meerdere keren een ja/nee-beslissing nemen. Voor twee of drie van dat soort beslissingen kan een venndiagram een goed overzicht geven van alle keuzes.

In de figuur is te zien dat van 39 leerlingen die de keuzevakken wiskunde D, informatica, of natuur, leven en technologie (NLT) of een combinatie van deze drie vakken doen, er 10 alleen wiskunde D doen, 6 wiskunde en NLT doen, 5 wiskunde en informatica doen, 3 informatica en NLT doen en 3 alledrie de vakken doen. Er zijn nog 4 leerlingen die alleen informatica volgen en 8 die alleen NLT hebben.



Figuur 4

Wanneer je een venndiagram maakt is er vaak een deel van de aantallen uitkomsten/keuzes gegeven. De andere aantallen keuzes kun je dan berekenen.

Opgave 3

Bestudeer de figuur in **Uitleg 2**.

- a Hoeveel leerlingen doen NLT?
- b Hoeveel leerlingen doen alleen NLT?
- c Hoeveel leerlingen doen twee keuzevakken?

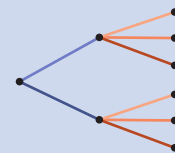
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het berekenen van kansen is meestal een kwestie van systematisch tellen van gebeurtenissen die even waarschijnlijk zijn. Daarvoor bestaat een aantal grafische hulpmiddelen:

Het boomdiagram:

Een schema waarin je alle gebeurtenissen weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Een boomdiagram kun je altijd toepassen, maar het kan veel werk zijn om het volledig te tekenen. Dit boomdiagram heeft twee 'lagen' met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken.



Het wegendiagram:

Een schema (ook wel genoemd graaf) waarin je de gebeurtenissen weergeeft als verbindinglijnen tussen punten. Een wegendiagram kun je toepassen als de aantallen gebeurtenissen in een niveau niet afhangen van wat er gebeurd is in andere niveaus. Het totaal aantal uitkomsten krijg je door de aantallen mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.



$2 \times 3 = 6$ mogelijkheden

Figuur 5

Een rooster:

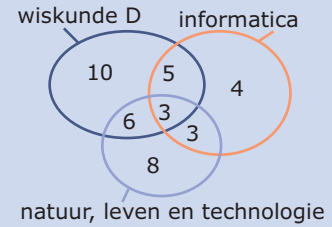
Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke uitkomsten bij werpen met twee geldstukken zien. Een rooster kun je altijd gebruiken als je met twee gebeurtenissen te maken hebt, zoals bijvoorbeeld het gooien van twee dobbelstenen.

| | K | M |
|---|----|----|
| K | KK | KM |
| M | MK | MM |

Figuur 6

Het venndiagram:

Een schema dat je gebruikt als verschillende eigenschappen elkaar overlappen, zodat iets meerdere eigenschappen tegelijk kan hebben. Het is ook te bekijken als de bijzondere weergave van de uitkomsten bij een twee of drie keer wel/niet-gebeurtenis. Denk maar aan de keuzemogelijkheden van vakken in de vrije ruimte.



Figuur 7

Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen.

Hoeveel mogelijke even waarschijnlijke uitkomsten zijn er in totaal?

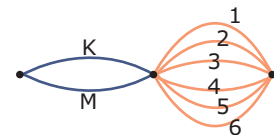
En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens 5 ogen en kop?

Antwoord

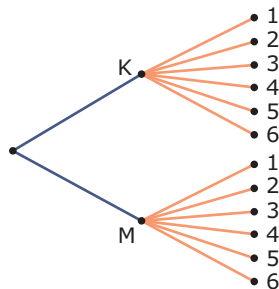
De mogelijke uitkomsten kun je in een wegediagram weergeven.

Er zijn totaal $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt totaal op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan.

Er zijn $1 \cdot 5 = 5$ mogelijkheden op hoogstens (niet meer dan) 5 ogen en kop.



De mogelijke uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen kun je ook in een boomdiagram weergeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) 5 ogen en kop.



Figuur 9

Opgave 4

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om ‘onder’ te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. We letten op de vlakken die ‘onder’ komen na het werpen.

- a Geef in een wegediagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- b Tel het aantal uitkomsten waarbij precies één keer het cijfer 3 onder ligt, bij de rode dobbelsteen.
- c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?
- d Hoe groot is de kans dat er precies één 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je van tevoren het totaal aantal ogen goed raadt, win je het spelletje.

Waarom kun je beter gokken op 7 ogen dan op 2 ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te krijgen.

Je ziet er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn.

En 7 ogen komt veel vaker voor dan 2 ogen.

Je ziet dat 7 ogen het vaakst voorkomt, dus daar moet je op gokken.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Figuur 10

Opgave 5

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster.

- a Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?
- b Je werpt met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens 9 ogen boven komen?

Opgave 6

Je hebt vier uiterlijk gelijke briefjes met daarop de namen Paul, Anja, Frits en Elly. De briefjes worden in een vaas gedaan, je moet er twee kiezen.

- a Teken bij deze situatie een rooster.
- b Laat zien dat een boomdiagram dezelfde mogelijkheden geeft.
- c Bepaal de kans dat je zowel Paul als Anja kiest.

Voorbeeld 3

Op een school kiezen 26 leerlingen in vwo-4 het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).

16 leerlingen kiezen wiskunde D, 12 kiezen informatica en 14 kiezen NLT.

Er zijn 13 leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.

3 leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, 8 leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de 3 leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.

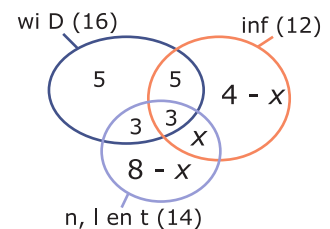
Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

Antwoord

Een venndiagram kan helpen. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest, stel je voor door x . Daarmee kun je het venndiagram invullen.

Het totaal is $5 + 3 + 3 + 5 + x + 4 - x + 8 - x = 28 - x$. Dit is gelijk aan de 26 leerlingen die er zijn. $28 - x = 26$ geeft $x = 2$.

Ter controle kun je nog even het hele diagram invullen.



Figuur 11

Opgave 7

Op een school kiezen 38 vwo leerlingen een NG-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen: natuurkunde, NLT (natuur, leven en technologie) of aardrijkskunde. 27 leerlingen kiezen natuurkunde, 18 kiezen NLT en 24 kiezen aardrijkskunde. Daarvan kiezen 8 leerlingen natuurkunde en NLT, 11 kiezen natuurkunde en aardrijkskunde en 4 kiezen NLT en aardrijkskunde.

- a Hoeveel leerlingen kiezen drie vakken?
- b Hoe groot is de kans dat een leerling alleen maar aardrijkskunde heeft gekozen?

Verwerken

Opgave 8

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen moet je een code van vier cijfers onthouden, waarbij de getallen 0 t/m 9 voor elk cijfer mogelijk zijn.

- Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?
- Je weet alle vier de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. De cijfers in de code zijn onderling verschillend. Hoe groot is de kans dat je direct de koffer open krijgt?

Opgave 9

Je werpt met drie gewone dobbelstenen.

- Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer.
- Hoe groot is de kans op precies één zes?
- Hoe groot is de kans op drie zessen?
- Hoe groot is de kans op minstens twee zessen?
- Hoe groot is de kans op hoogstens twee zessen?

Opgave 10

Een fabrikant van consumptie-ijs probeert drie smaken uit. Het gaat om de smaken 'aardbeien', 'banaan' en 'citroen'. Hij laat een onderzoek instellen onder 170 willekeurig gekozen mensen. Tien ondervraagden waarderen alle drie de smaken positief. Acht mensen waarderen geen enkele smaak positief. De andere positieve oordelen zijn als volgt:

- alleen aardbeien: 42;
- alleen banaan: 49;
- alleen citroen: 41;
- alleen aardbei en banaan: 5;
- alleen aardbei en citroen: 7;
- er zijn ook mensen die alleen citroen en banaan lekker vinden.

- Maak een venndiagram van deze gegevens en bereken hoeveel mensen alleen citroen en banaan lusten.
- Hoeveel procent van de ondervraagden had een positief oordeel over banaan of citroen?
- Hoeveel mensen hadden een negatief oordeel over zowel aardbeien als banaan?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige ondervraagde niet van aardbeienijs houdt? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1. Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Een toets bestaat uit tien meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

- Hoeveel manieren zijn er om de toets te maken?
- Er zijn zes vragen die je zeker weet. De overige vragen moet je raden. Op hoeveel mogelijke manieren kun je de toets nu nog maken?
- Hoe groot is de kans dat je nu 'als je zes vragen zeker weet' minstens een 8 haalt? Elk goed antwoord levert één punt op. Voor het cijfer 8 moet je dus acht antwoorden goed hebben.
- Als je alleen let op 'goed' of 'fout' en je moet alle 10 de vragen beantwoorden, hoeveel series antwoorden zijn dan mogelijk?

Opgave 12

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes en je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je nu drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Van de plaatjes is per band het aantal op die band aangegeven.

| plaatje | band 1 | band 2 | band 3 |
|-------------|--------|--------|--------|
| BAR | 1 | 2 | 1 |
| bel | 8 | 1 | 7 |
| pruim | 2 | 7 | 3 |
| sinaasappel | 2 | 8 | 4 |
| twee kersen | 7 | 2 | 0 |
| citroen | 0 | 0 | 5 |

- a Op hoeveel manieren kun je drie keer 'sinaasappel' krijgen?
- b Op hoeveel manieren kun je drie keer 'twee kersen' krijgen?
- c Hoe groot is de kans dat je iets wint?
- d Je krijgt de plaatjes 'bel', en twee keer 'pruim'. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?
- e Je krijgt de plaatjes 'bel', 'sinaasappel' en 'citroen'. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?
- f Hoeveel samenstellingen van drie verschillende plaatjes bestaan er?

Figuur 12

Toepassen

Opgave 13: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

- a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?
- b Eén van de worpen die punten oplevert, is Grote Straat. Bij deze worp gooi je vijf opeenvolgende nummers. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Grote Straat te gooien?

Figuur 13

Testen

Opgave 14

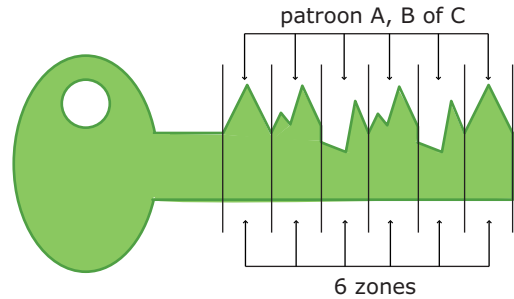
Op vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: 2 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 korte broeken en 5 shirts.

- a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broeken en shirts en bereken op hoeveel manieren je je kunt kleden.
- b Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je je daar luchtig gekleed vertoeven?

Opgave 15

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet, bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt één van de patronen A, B of C gekozen.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige sleutel voor zo'n slot ook echt past?



Figuur 14

Opgave 16

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op ieder een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om deze kaarten onder de foto's van deze zangeressen te hangen, de juiste naam bij elke foto. Deze deelnemer kent geen van de vier zangeressen en besluit op goed geluk de kaarten op te hangen.

- a Laat met behulp van een boomdiagram zien hoe groot de kans is dat hij één kaart goed hangt.
- b Hoe groot is de kans dat hij alle kaarten goed hangt?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
