1.2 Redeneren

Inleiding

Bij het werpen met een zuivere dobbelsteen weet je dat elk vlakje dezelfde kans heeft om boven te komen. Dat hoef je niet meer steeds experimenteel te bevestigen. Als je vooraf weet welke mogelijkheden even waarschijnlijk zijn kun je kansen berekenen door daarmee te redeneren.
Dan is het vooral een kwestie van alle even waarschijnlijke mogelijkheden in kaart te brengen. Op grond daarvan kun je dan een uitspraak doen over de kans op een bepaalde gebeurtenis.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- in een aselecte proef de verschillende gebeurtenissen in kaart brengen;
- het begrip theoretische kans kennen en kunnen gebruiken.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met experimentele kansen en simulaties.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt met twee dobbelstenen. Tel het aantal ogen dat boven komt.

Leg uit waarom de kans op het gooien van 3 ogen kleiner is dan op het gooien van 7 ogen.
Bepaal beide kansen door redeneren.

Uitleg

Stel je voor dat je zonder met een dobbelsteen te gooien, de kans wilt bepalen dat je na eenmaal werpen een vijf gooit. Stel, je weet het volgende:

- Het aantal mogelijke uitkomsten is zes, de dobbelsteen heeft immers zes zijkanten;
- Elk vlakje heeft dezelfde kans om boven te komen omdat de dobbelsteen zuiver is en er willekeurig wordt geworpen.

Dan geldt: De kans op het gooien van een vijf is te beredeneren als het aantal gewenste uitkomsten gedeeld door het aantal mogelijke uitkomsten is. Die kans is $\frac{1}{6}$.

Opgave 1

Je gooit één keer met twee dobbelstenen.

a Hoe groot is de kans op het gooien van twee zessen?

b Bereken de kans op het gooien van een vijf en een zes.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je (zonder experimenteren) weet dat uitkomsten even waarschijnlijk zijn, kun je kansen berekenen door te redeneren.

Deze kans heet **theoretische kans** en is gelijk aan:
$\frac{\text{het aantal gunstige uitkomsten}}{\text{het aantal mogelijke uitkomsten}}$.
Het aantal gunstige uitkomsten is altijd kleiner dan of gelijk aan het totale aantal mogelijke uitkomsten. De theoretische kans is dus een breuk met een waarde tussen 0 en 1.

De **wet van de grote aantallen** geeft een verband tussen theoretische en experimentele kansen: Als je een kansexperiment een zeer groot aantal keren zou kunnen uitvoeren, is de kans dat de experimentele kans en de bijbehorende theoretische kans veel van elkaar verschillen gelijk aan 0.

De kans (theoretisch of experimenteel) op een uitkomst 5 bij het gooien met een dobbelsteen noteer je zo: $\text{P}(X = 5) = \frac{1}{6}$. Spreek uit: De kans op het werpen van vijf ogen is een zesde.

- De hoofdletter P is de afkorting van het Engelse woord **probability** (van het Latijnse woord probabilitas). Dit betekent waarschijnlijkheid of kans.
- X is de kansvariabele die de 'waarde' kan hebben van alle mogelijke uitkomsten van het theoretische of praktische kansexperiment.
- $X = 5$ is de notatie voor een gebeurtenis, in dit geval de gebeurtenis waarbij na het werpen met de dobbelsteen, de vijf boven ligt.

Heb je te maken met bijvoorbeeld meerdere dobbelstenen (of munten, of andere dingen) dan moet je de systematisch werken, zodat je geen mogelijkheid over het hoofd ziet. Tabellen en schema's kunnen daarbij helpen.

Voorbeeld 1

Hoe zit het met de mogelijke kansen als je met één dobbelsteen werpt?

Hoe groot is de kans dat je meer dan 4 ogen gooit?

Figuur 2

Antwoord

Noem het aantal ogen op een vlak van de dobbelsteen X.
Bij een zuivere dobbelsteen met op de zijvlakken de getallen 1 tot en met 6 kan de gebeurtenis $X = 7$ zich niet voordoen. $\text{P}(X = 7) = 0$. Zo is ook: $\text{P}(X = 0) = 0$.

$\text{P}(X = 1) = \text{P}(X = 2) = \text{P}(X = 3) = \text{P}(X = 4) = \text{P}(X = 5) = \text{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Meer dan 4 ogen gooi je als: $X = 5$ of $X = 6$. Het aantal gunstige uitkomsten is twee. Als mogelijke uitkomsten heb je 1, 2, 3, 4, 5 en 6 ogen. Het totaal aantal uitkomsten is zes.

De kans dat de uitkomst bij één worp meer dan 4 ogen is, is twee op zes:
$\text{P}(X = 5 \vee X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Opgave 2

Je hebt een vaas met vier rode en zes witte balletjes. De vaas wordt goed geschud. Jan haalt één balletje uit de vaas zonder te kijken. Hij zegt dat hij een kans van $\frac{1}{2}$ heeft, dat het een rood balletje is: er zijn immers twee kleuren, 'rood' en 'wit' en het balletje heeft één van die twee kleuren.

Waarom is die redenering fout? Hoe groot is de kans op een rode bal wel?

Opgave 3

Noem X het aantal ogen dat boven komt bij een dobbelsteenworp.

a Bereken $\mathrm{P}(X \leq 4)$.

b Bereken $\mathrm{P}(X \leq; 4)$.

c Bereken $\mathrm{P}(X = \text{oneven})$

d Bereken de kans op minstens 2 ogen.

Voorbeeld 2

Hoe zit het met de mogelijke kansen als je met twee dobbelstenen werpt en je let op het totaal aantal ogen dat boven komt? Maak een overzicht.

Hoe groot is de kans dat je minstens 8 ogen gooit?

Figuur 3

Antwoord

Het aantal ogen dat in totaal boven kan komen, is 2, 3, 4, ..., 11, 12.
Dat zijn elf mogelijke uitkomsten. Die zijn echter niet even waarschijnlijk.

Bij iedere uitkomst voor de ene dobbelsteen zijn er immers zes mogelijkheden voor de andere; dat geeft in totaal 36 mogelijkheden. Neem X voor het aantal ogen op de ene dobbelsteen en Y voor het aantal ogen op de andere. In de figuur zie je alle 36 mogelijkheden voor $X + Y$, het totaal aantal ogen per worp.

Het aantal gunstige uitkomsten voor een totaal van bijvoorbeeld 8 ogen is vijf.
De kans dat het totaal aantal ogen 8 is bedraagt $\mathrm{P}(X + Y = 8) = \frac{5}{36}$.

De kans op meer dan 8 ogen is: $\mathrm{P}(X + Y >; 8) = \frac{10}{36}$. De kans op minstens 8 ogen is: $\frac{5}{35} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 4

Opgave 4

Stel je voor dat je met twee dobbelstenen gooit en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Het aantal ogen op de ene steen stellen we voor door X, dat op de andere steen door Y. Dus $X + Y$ is het totaal aantal ogen dat bovenkomt.

a Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Voor hoeveel mogelijkheden geldt: $\mathrm{P}(X + Y = 5)$?

c Hoe groot is dus $\mathrm{P}(X + Y = 5)$?

d Hoe groot is $\mathrm{P}(X + Y = 7)$?

e Schrijf met behulp van de symbolen P, X en Y de kans op minstens 9 ogen op. Hoe groot is die kans?

Voorbeeld 3

Ook bij het delen van speelkaarten spelen kansen een grote rol. Een normaal kaartspel telt 52 kaarten.
Er zijn vier 'kleuren': harten, schoppen, ruiten, klaveren.
Als het delen van kaarten eerlijk gebeurt, is er sprake van een aselecte trekking. Hoe groot is daarbij de kans dat je bij trekking van één kaart een aas krijgt? Hoe groot is de kans dat het hartenaas is?

Antwoord

Er zijn vier azen in het spel. De kans op een aas is $P(\text{aas}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

De kans op hartenaas is $P(\text{hartenaas}) = \frac{1}{52}$.

Figuur 5

Opgave 5

Stel je voor dat je aselect één kaart uit een goed geschud spel van 52 kaarten trekt.

a Hoe groot is de kans op een schoppen tien?

b Hoe groot is de kans op een plaatje?

c Hoe groot is de kans op een ruitenkaart?

Opgave 6

Welke van de volgende kansen kun je door redeneren bepalen? Bereken zo mogelijk de grootte van die kans, of geef aan hoe deze te bepalen is.

a De kans dat je in december minstens één keer te laat komt op school.

b De kans om een meerkeuzevraag met vier keuzemogelijkheden bij toeval goed te beantwoorden.

c De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren een jongen is.

d De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren in een gezin met al drie jongens, weer een jongen is.

e De kans dat het morgen zes uur regent in Enschede.

f Je werpt met een dobbelsteen in de vorm van een regelmatig achtvlak met 4 rode, 2 witte en 2 blauwe zijvlakken. Hoe groot is de kans dat bij het werpen met zo'n dobbelsteen, deze op een rood zijvlak komt te liggen?

Verwerken

Opgave 7

Je trekt aselect een kaart uit een kaartspel van 52 kaarten. Geef de antwoorden op onderstaande vragen in een breuk.

a Hoe groot is de kans op een hartenkaart?

b Hoe groot is de kans op een tien die geen harten is?

c Stel dat je een harten tien hebt getrokken, en je trekt daarna een tweede kaart uit het spel. Hoe groot is de kans op een tien?

Opgave 8

Je hebt een ondoorzichtige doos met daarin tien gekleurde balletjes, zeven groene en drie gele. De groene balletjes zijn genummerd 1 tot en met 7, de gele 1 tot en met 3. Je schudt die doos en haalt er zonder te kijken één balletje uit. Geef antwoorden op onderstaande vragen als breuk.

a Hoe groot is de kans dat het een geel balletje is?

b Hoe groot is de kans dat het een balletje met nummer 1 is?

c Hoe groot is de kans dat het balletje nummer 4 heeft?

d Hoe groot is de kans dat het een groen balletje met een nummer hoger dan 3 is?

Opgave 9

Je werpt met drie geldstukken.
Hoe groot is de kans op kop bij elk geldstuk? Hoe groot is de kans dat je drie keer kop gooit?

Opgave 10

Er wordt een loterij gehouden. De loten hebben nummers 000 tot en met 999. Alle loten zijn verkocht. Er is 1 eerste prijs, er zijn 2 tweede prijzen en er zijn 3 derde prijzen. Op volkomen aselecte wijze wordt een lotnummer getrokken. Geef de antwoorden op onderstaande vragen als breuk, indien van toepassing.

a Jij hebt het nummer 113. Hoe groot is de kans dat jij de eerste prijs hebt?

b Je vriendin zegt dat ze een even lotnummer heeft. Hoe groot is de kans dat zij de tweede prijs heeft?

c Hoe groot is de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

d Waarom zijn de kansen bij b en c verschillend?

De tweede prijs is gevallen op lotnummer 771. Hierna wordt er weer een lot getrokken. Nummer 771 doet niet meer mee.

e Hoe groot is jouw kans op de andere tweede prijs?

f Hoe groot is nu de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

Opgave 11

Je werpt met twee dobbelstenen en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Geef de antwoorden op de onderstaande vragen als breuk.

a Hoe groot is de kans dat er 7 ogen boven komen te liggen?

b Hoe groot is de kans op hoogtens 7 ogen?

c Hoe groot is de kans op meer dan 11 ogen?

d Hoe groot is de kans op een even aantal ogen?

Opgave 12

Bij een voetbaltoernooi wordt aan het begin van elke wedstrijd getosst met een munt om te bepalen welke ploeg mag aftrappen. Tijdens dit toernooi speelt Cambuur vier wedstrijden.

a Hoe groot is de kans dat Cambuur bij de eerste wedstrijd de toss ‘wint’ en mag aftrappen?

b Hoe groot is de kans dat Cambuur alle vier de wedstrijden mag aftrappen?

c Hoe groot is de kans dat Cambuur minstens drie keer mag aftrappen?

Toepassen

Opgave 13: Knipperen met de ogen

Alle mensen knipperen met hun ogen. Daardoor staan op groepsfoto's vaak enkele personen met gesloten ogen. Svenson en Barnes hebben onderzocht hoeveel foto's je moet maken van een groep van n personen om 99% kans te hebben op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft. Zij hebben bij hun berekeningen de volgende aannames gemaakt:

- Het knipperen met de ogen gebeurt met onregelmatige tussenpozen.
- Mensen knipperen gemiddeld tien keer per minuut met de ogen.
- Als iemand knippert, zijn de ogen gedurende 0,25 seconden dicht.

a Op een willekeurig moment wordt één foto genomen van één persoon. Op basis van de aannames van Svenson en Barnes kunnen we de kans berekenen dat deze persoon niet met gesloten ogen op de foto staat.

Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Ga er van uit dat de kans dat iemand met open ogen op de foto staat gelijk is aan 0,96. Bij een groepsfoto spreken we van een "geslaagde" foto als alle personen op de foto hun ogen open hebben. Een fotograaf neemt één groepsfoto van een groep van 20 personen.

b Bereken de kans op een geslaagde groepsfoto.

Een fotograaf neemt 5 groepsfoto's van een groep van 25 personen.
De kans dat er minstens één geslaagde foto bij zit is ongeveer 0,89.

c Toon dat met een berekening aan.

Opgave 14: Gezinssamenstelling

Voor een bevolkingsonderzoek worden willekeurige gezinnen uitgekozen die twee kinderen hebben van verschillende leeftijd, en waarvan ten minste één kind een jongen is. Menaar en mevrouw Dollekamp doen mee met het onderzoek.

Hoe groot is de kans dat hun beide kinderen jongens zijn?

Testen

Opgave 15

Je trekt aselect een kaart uit een volledig kaartspel (52 kaarten). Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk.

a Hoe groot is de kans op een harten kaart?

b Hoe groot is de kans op een boer?

c Hoe groot is de kans op een hartenboer?

Opgave 16

Bij roulette wordt een balletje aselect in een draaiend rad geworpen. Dit rad bevat 37 vakjes, volgens een bepaald patroon genummerd van 0 tot en met 36. De vakjes zijn om en om rood en zwart gekleurd, behalve het vakje met 0, dat is groen. Elk fiche die je op het winnend nummer hebt gezet, krijg je 36 keer uitbetaald. Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk, indien van toepassing.

a Waarom krijg je niet 37 keer uitbetaald?

b Hoe groot is de kans op winst bij één keer spelen met één fiche?

c Verandert die kans als je twee fiches op hetzelfde nummer inzet? En als je twee fiches op verschillende nummers inzet?

d Hoe groot is de kans dat het balletje op een oneven getal komt te liggen?

e Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen?

f Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen wanneer al 26 keer achter elkaar een zwart getal is gedraaid?

Opgave 17

Je werpt met twee dobbelstenen. P is het product van het aantal ogen dat boven komt.

Bereken de kans dat P minstens 20 wordt. Geef je antwoord als breuk.