1.1 Experimenteren

Inleiding

Als je vaak met een zuivere dobbelsteen gooit, komt elk vlakje gemiddeld genomen ongeveer even vaak boven te liggen. In de praktijk blijkt dat dit bij steeds meer herhalingen steeds beter gaat kloppen.
Omdat een dobbelsteen 6 vlakken kent, zeg je dat de kans dat één van die vlakken boven komt 1 op de 6 is. Het is gebruikelijk om dit als breuk te schrijven en te zeggen dat de kans op het gooien van bijvoorbeeld 4 ogen met een zuivere dobbelsteen $\frac{1}{6}$ is.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van experimenten;
- simulaties van kansexperimenten uitvoeren;
- begrippen als gebeurtenis en relatieve frequentie kennen en ermee kunnen werken;
- de wet van de grote aantallen begrijpen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Of iets gaat gebeuren weet je meestal niet van tevoren. Kun je iets zeggen over de kansen bij de volgende situaties?

a Je gooit met twee dobbelstenen. Je telt het aantal ogen dat boven komt.

b Een voetbalwedstrijd kan beslist worden door het nemen van strafschoppen. Van tevoren weet je niet hoeveel ervan gemist zullen worden.

c De weersvoorspelling van morgen is betrouwbaarder dan die van over een week.

d In een bejaardentehuis is het bingo-avond. Wie wint de hoofdprijs?

Uitleg

Een paar uitspraken over kansen:

- Als je met twee dobbelstenen gooit, is de kans dat je 10 ogen gooit kleiner dan dat je 7 ogen gooit.
- De kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is, is erg klein.
- De kans dat een kind van wie de vader en moeder bruine ogen hebben, ook bruine ogen heeft, is groot .

Kansen druk je uit in percentages (tussen 0% en 100%) of breuken (tussen 0 en 1).
Zo kun je zeggen:

- De kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit, is 50%.
- Op grond van eerdere resultaten schat ik dat Ajax 80% kans heeft om deze wedstrijd te winnen.
- Bij roulette heeft het balletje een kans van $\frac{18}{37}$ om op een rood veld te komen.

Kansen spelen een belangrijke rol bij sport en spel. Bijvoorbeeld bij kansspelen zoals dobbelen en roulette. Je neemt wel aan dat dobbelstenen en roulettetafels geen afwijkingen hebben, dat wil zeggen dat geen van de mogelijke uitkomsten waarschijnlijker is dan een andere.

De kans dat iets gebeurt, kun je bepalen door te proberen. Als je bijvoorbeeld de kans wilt uitrekenen dat bij het werpen met een dobbelsteen het vlakje met vijf ogen bovenkomt, kun je gewoon enkele honderden of meer keren met een dobbelsteen gooien en proefondervindelijk vaststellen welk vlakje bovenkomt. Je voert dan hetzelfde kansexperiment heel vaak uit.

Figuur 2

uitkomst X	1	2	3	4	5	6
na 600 keer werpen	103	101	96	98	98	104
na 6000 keer werpen	1003	991	1005	997	1003	1001

Tabel 1

Na 600 keer werpen kwam 5 ogen 98 keer voor.
De kans op 5 ogen kun je daarom benaderen door $\frac{98}{600} \approx 0{,}163$.
Na 6000 worpen is deze benadering $\frac{1003}{6000} \approx 0{,}167$.
De laatste schatting is betrouwbaarder omdat er meer experimenten zijn gedaan.

Opgave 1

Lees de **Uitleg** goed door.

a Waarom is bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op 10 ogen kleiner dan die op 7 ogen?

b Hoe zou je de kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is, kunnen berekenen?

c Sjon en Meindert spelen een spelletje dobbelen. Sjon gooit aan het eind van het potje met dezelfde dobbelsteen drie keer achter elkaar een 6, en wint daarmee het potje. Meindert is wantrouwig en zegt dat de dobbelsteen verzwaard is. Heeft Meindert gelijk?

d Bij het volgende potje dobbelen staat Meindert erop zijn ‘geluksdobbelsteen’ te gebruiken en haalt een nieuwe dobbelsteen uit z'n binnenzak. Ze beginnen een nieuw potje, dat Meindert direct wint door met zijn dobbelsteen drie zessen achter elkaar te gooien. Nu is het Sjon die Meindert beschuldigt van valsspelen. Meindert, op zijn beurt, noemt het karma. Wie heeft hier gelijk?

e Van een potje bingo is bekend dat iedereen een winkans van 2% heeft. Wat weet je van het aantal deelnemers?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je de uitkomsten van worpen met een dobbelsteen.

a Hoe groot schat je de kans op 4 ogen bij 600 keer werpen met een dobbelsteen?

b En hoe groot schat je die kans bij 6000 keer werpen?

c Lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat dit een zuivere dobbelsteen is?

Opgave 3

Stel, je vraagt je af of de kans dat een punaise, als hij valt, met de punt naar boven komt te liggen gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hiertoe voer je een experiment uit: je laat een punaise tien keer op een houten tafel vallen. Deze komt zes keer met de punt naar boven neer.

Figuur 3

a Bepaal uit dit experiment de kans dat de punaise met de punt naar boven komt te liggen.

b Je herhaalt het experiment, maar dit keer door de punaise vijftig keer op een tapijt op de vloer te laten vallen. Nu komt deze achttien keer met de punt naar boven neer. Bepaal nogmaals de kans uit dit experiment.

c Als je het gemiddelde neemt van de resultaten bij a en b kom je door dit experiment op een kans van ongeveer $\frac{1}{2}$. Je zou de conclusie kunnen trekken dat een punaise daadwerkelijk ook een kans van $\frac{1}{2}$ heeft om met de punt boven te komen liggen. Lever commentaar.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **kansexperiment** staat het resultaat niet bij voorbaat vast. Een voorbeeld hiervan is het gooien met één dobbelsteen. De **mogelijke uitkomsten** zijn alle mogelijke resultaten van het kansexperiment. In dit geval het gooien van 1, 2, 3, 4, 5 of 6 ogen.
Een **uitkomst** of **gebeurtenis** is een (soms vooraf gedefinieerd) resultaat, bijvoorbeeld 'het werpen van 5 ogen' of 'het werpen van eerst 4 ogen en daarna 6 ogen'.

De **relatieve frequentie** van een gebeurtenis is:

$$\frac{\text{het aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt}}{\text{het aantal herhalingen van het kansexperiment}}$$

De **experimentele wet van de grote aantallen** is een ervaringsregel: In de praktijk blijkt dat de relatieve frequentie bij een groot aantal keren uitvoeren van een kansexperiment naar één waarde lijkt te gaan.
Deze waarde noem je de **experimentele kans** op die gebeurtenis.

Relatieve frequenties zijn ook te bepalen uit statistieken.

Verder kunnen relatieve frequenties worden bepaald door **simuleren**: nabootsen met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine. Bekijk het **Practicum**. Redenen om dit te doen, kunnen zijn: Sneller kunnen werken of het vermijden van gevaarlijke experimenten (bijvoorbeeld overstroming of falen van een vliegtuig).

Voorbeeld 1

Je gooit heel vaak met een dobbelsteen en turft hoe vaak er 3 ogen boven komen. Bepaal zo de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Je gooit daarna heel vaak met twee dobbelstenen en turft hoe vaak er 3 ogen boven komen. Bepaal zo ook de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Kun je verklaren waarom de kans op 3 ogen bij het werpen met twee dobbelstenen kleiner is dan bij het werpen met één dobbelsteen?

Figuur 4

Antwoord

Je gooit bijvoorbeeld honderd keer met die dobbelsteen en er komt 17 keer 3 ogen boven te liggen.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis '3 ogen liggen boven' is dan $\frac{17}{100}$.
De kans op de 3 ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,17.

Je gooit vervolgens 100 keer met die twee dobbelstenen en er komt 6 keer 3 ogen boven te liggen. De relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘3 ogen liggen boven’ is dan $\frac{6}{100}$.
De kans op de 3 ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,06.

Om 3 ogen met twee stenen te gooien, moet je 1 en 2 ogen gooien of 2 en 1 ogen, dat geeft een kans van $\frac{2}{36}$. De kans om 3 te gooien met één steen is $\frac{1}{6}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je door experimenteren kansen kunt bepalen bij het werpen met dobbelstenen.

a Werp zestig keer met twee dobbelstenen en houd bij hoe vaak je 7 en hoe vaak je 10 ogen krijgt. Welke experimentele kans op 7 ogen vind je? En welke experimentele kans op 10 ogen?

b Is bij jou de experimentele kans op 7 ogen ook groter dan die op 10 ogen?

c Kun je beredeneren met de wet van de grote aantallen waarom dit (ook als het bij jou niet klopt) toch het geval is?

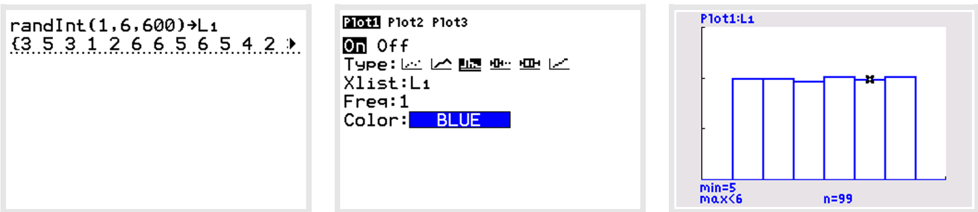
d Je gooit met twee dobbelstenen na elkaar. Met de eerste heb je al een 2 gegooid. Welke theoretische kans is groter: de kans dat je met de twee dobbelstenen bij elkaar een 6 gooit, of dat je met de tweede dobbelsteen een 6 gooit?

Voorbeeld 2

Wanneer je zeshonderd keer wilt werpen met een zuivere dobbelsteen om de experimentele kans op 5 ogen te bepalen, kost dat veel tijd. Zo'n experiment kun je sneller simuleren met de grafische rekenmachine. De grafische rekenmachine beschikt over een functie die willekeurig getallen genereert.

Bekijk de simulatie. Daarbij is ervoor gezorgd dat de kans op elke uitkomst in de grafische rekenmachine gelijk is aan de kans op die uitkomst in werkelijkheid.

Het staafdiagram geeft de relatieve frequenties bij het simuleren van 600 keer werpen met een dobbelsteen weer. De experimentele kans op 5 ogen is bij benadering $\frac{99}{600}$.



Figuur 5

Bij experimenten die uitkomsten hebben die geen getallen zijn, moet je elke uitkomst vertalen naar een getal of serie getallen. De kans op dat getal of die serie van getallen moet gelijk zijn aan de kans op die uitkomst.

Bestudeer het **Practicum** en voer de simulatie die hierboven beschreven is zelf uit.

Opgave 5

Met toevalsgetallen op de grafische rekenmachine kun je het werpen met een dobbelsteen simuleren. Je weet dat toevalsgetallen tussen de 0 en 1 liggen.

a Leg uit hoe je met de grafische rekenmachine een worp met twee dobbelstenen kunt simuleren.

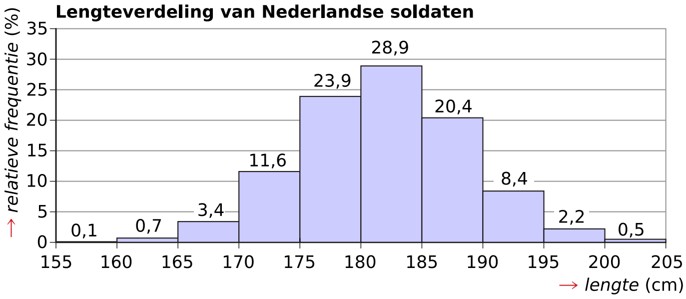
b Simuleer zeshonderd worpen met twee dobbelstenen en geef de resultaten weer in een staafdiagram.

c Hoe groot schat je de experimentele kans op 5 ogen?

d Beredeneer wat de kans op 4 ogen zou moeten zijn en controleer dan of die overeenstemt met je simulatie.

Voorbeeld 3

Je ziet de relatieve frequenties van de lichaamslengten van vijfhonderd Nederlandse mannelijke soldaten.
Een fabrikant van truien voor Nederlandse mannelijke soldaten maakt deze in een aantal maten.
De maat S (small) bijvoorbeeld is bedoeld voor soldaten tot 175 cm lengte.
Welk deel van zijn truien produceert hij in maat S als hij dit diagram ziet?



Figuur 6

Antwoord

Met behulp van dit diagram ziet de fabrikant dat 15,8% van de gemeten soldaten maat S heeft.
Hij kan dit volgens de experimentele wet van de grote aantallen opvatten als de kans dat een willekeurige Nederlandse mannelijke soldaat die maat heeft. Het is dus een schatting van het percentage truien van maat S dat hij zou moeten laten maken.

Opgave 6

Je ziet in **Voorbeeld 3** het staafdiagram met de lengteverdeling van vijfhonderd Nederlandse mannelijke soldaten. De fabrikant van truien voor het leger heeft de maten small (S) voor soldaten tot 1,75 m; medium (M) voor soldaten vanaf 1,75 m tot en met 1,90 m en large (L) voor soldaten vanaf 1,90 m.

a Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui van maat M nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

b Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui van maat S of L nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

De fabrikant bepaalt op grond van deze experimentele kansen hoeveel truien van elke maat hij zal maken als er een grote bestelling binnenkomt. Maar hij krijgt te horen dat maat L niet bevalt: voor soldaten van meer dan 2,00 m lengte zijn deze truien te klein. Hij besluit een maat XL in te voeren voor deze soldaten.

c Hoeveel procent van zijn truien zal hij in maat XL laten produceren?

Opgave 7

De tabel geeft informatie over het voor komen van kleurenblindheid:

	Man	Vrouw	Totaal
Kleurenblind	479	58	537
Niet kleurenblind	5226	4237	9463
Totaal	5705	4295	10000

Tabel 2

Ga ervan uit dat de gegevens in de tabel maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

a Je komt een man uit deze groep tegen en wilt de kans schatten dat hij kleurenblind is.
Welk getal beschouw je dan als ‘aantal herhalingen van het kansexperiment’ en welk getal als ‘aantal keren dat die gebeurtenis (kleurenblind) voorkomt’?

b Hoe groot is die kans? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat de volgende persoon die je tegenkomt een kleurenblinde man is? Rond af op gehele procenten.

d Verklaar waarom het antwoord op b verschilt van dat op c.

Verwerken

Opgave 8

Stel je werpt met twee dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1 tot en met 4. Je let op de som van de getallen die onder komen te liggen.

Hoe groot schat je de kans op uitkomst 3?

Opgave 9

Beschrijf voor de volgende kansexperimenten hoe je ze kunt simuleren met de grafische rekenmachine.

a Het aantal keer kop bij het tossen van één muntje.

b Het aantal ogen bij het werpen van twee dobbelstenen.

c Het aantal ogen na het werpen van een dobbelsteen waar op de zijvlakken 1, 1, 3, 4, 4 en 6 ogen voorkomen.

Opgave 10

Twee spelers A en B spelen een spel. Beiden hebben twee lucifers waarvan ze er (zonder dat aan elkaar te laten zien) 0, 1 of 2 in de hand nemen. Ze leggen hun hand dicht voor zich op tafel. Daarna openen ze tegelijk hun hand en laten elkaar zien hoeveel lucifers ze in de hand hebben. A wint als beide aantallen lucifers precies één verschillen, anders wint B. Ga ervan uit dat het aantal lucifers dat de spelers in de hand nemen uitsluitend van het toeval afhangt.

a Hoe zou je dit spel kunnen simuleren met toevalsgetallen?

b Geef systematisch alle mogelijkheden van het spel weer.

c Denk je dat dit spel eerlijk is? Met andere woorden hebben A en B een gelijke kans om te winnen?

Opgave 11

Een fabrikant heeft steekproefsgewijs de levensduur in uren van zijn gloeilampen onderzocht. Je ziet de gegevens weergegeven in een tabel. Ga ervan uit, dat de gegevens uit de steekproef maatgevend zijn voor alle lampen van deze fabrikant.

a Hoeveel lampen zaten er in de steekproef?

b Maak een staafdiagram met relatieve frequenties.

c Hoe groot is de kans dat een lamp niet meer dan 1250 uur brandt? Rond af op gehele procenten.

d Hoe groot is de kans dat een lamp minstens 1650 uur mee gaat? Rond af op gehele procenten.

e Schat de kans dat de levensduur van een lamp meer dan honderd uur van het gemiddelde afwijkt.

levensduur	*aantal*
950– < 1050	4
1050– < 1150	9
1150– < 1250	16
1250– < 1350	36
1350– < 1450	51
1450– < 1550	58
1550– < 1650	53
1650– < 1750	37
1750– < 1850	20
1850– < 1950	9
1950– < 2050	3
2050– < 2150	1

Tabel 3

Opgave 12

In deze tabel worden de resultaten van het schoolexamens (S.E.) en het centraal examen (C.E.) van een bepaalde school vergeleken. De getallen zijn percentages die zijn ontstaan uit gemiddelden over vele jaren.

a Hoe groot is de kans dat iemand die op het S.E. een 5 scoort, op het C.E. een voldoende haalt? Geef het antwoord als breuk.

b Hoe groot is de kans dat iemand op het C.E. beter scoort dan op het S.E.? Geef het antwoord als breuk.

	SE				
CE	4	5	6	7	8
5	10	11	8	3	0
6	5	5	14	13	4
7	0	2	7	12	6

Tabel 4

Toepassen

Opgave 13: Rangen in een computerspel

Een online computerspel verdeelt z'n spelers in rangen 0 tot en met 5: spelers met rang 0 zijn beginners, en die met rang 5 worden gezien als heel ervaren spelers. Bij elk potje worden door een complex algoritme twee online spelers uitgekozen en tegen elkaar gepit. Als het goed is, hebben de spelers dezelfde rang (om het eerlijk te houden), maar dit lukt niet altijd. In dat geval wordt er gezocht naar een speler met een rang hoger of lager (dus rangverschil 1), en als dat niet lukt, wordt er wéér een rang hoger of lager gekeken (rangverschil 2). Zo gaat het door tot je een tegenstander hebt.

rang	0	1	2	3	4	5
0	458	108	75	35	8	1
1	135	521	159	89	27	5
2	84	121	409	154	92	36
3	34	86	146	388	137	81
4	8	26	98	126	535	101
5	2	7	30	92	123	463

Tabel 5

De ontwikkelaars van het spel willen graag weten of hun algoritme goed werkt en houden bij hoe spelers van verschillende rangen uitgekozen worden. Hierbij bekijken ze vijfduizend gespeelde spelletjes. De resultaten staan in de tabel.

Wat je ziet, is hoe vaak een uitdagende speler (verticaal) van een bepaalde rang gepit wordt tegen een ontvangende speler (horizontaal) van een bepaalde rang.

Wat is de kans dat het algoritme twee spelers van een verschillende rang tegen elkaar plaatst? Geef je antwoord in procenten, in twee decimalen nauwkeurig. Wat vind je van dit algoritme?

Opgave 14: Vreemde dobbelstenen

De investeerder Warren Buffett houdt van dobbelspelletjes met ongebruikelijke dobbelstenen. Hij daagt Bill Gates, de oprichter van Microsoft, uit voor een spelletje waarbij ze allebei een dobbelsteen mogen werpen. Degene met het hoogste ogenaantal wint.

Ze gebruiken drie dobbelstenen: een blauwe, een groene en een rode. De ogenaantallen op de dobbelstenen staan in tabel 1.

Warren laat Bill als eerste een dobbelsteen kiezen, en nadat Bill de blauwe pakt, kiest Warren de rode dobbelsteen.

blauw	3	3	3	3	3	6
groen	2	2	2	5	5	5
rood	1	4	4	4	4	4

tabel 1

som	2	5	8
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

tabel 2

Tabel 6

a Schat met behulp van relatieve frequenties de kans dat Warren wint.

Even later spelen Warren en Bill weer tegen elkaar, maar de spelregels zijn veranderd. Er zijn nu twee blauwe, twee groene en twee rode dobbelstenen. Warren kiest twee dobbelstenen van gelijke kleur, waarna Bill twee andere dobbelstenen van gelijke kleur moet kiezen. De winnaar is degene met de hoogste som van zijn ogenaantallen. Warren begint. Hij kiest de twee rode dobbelstenen.

De kansverdeling voor de som van zijn ogenaantallen staat in tabel 2.

Bill kiest de twee groene dobbelstenen.

b Bereken de kans dat Bill wint.

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald spel horen twee viervlaksdobbelstenen waarop de getallen 1 tot en met 4 staan.

a Stel je voor dat je er niet zeker van bent dat bij deze dobbelstenen elk vlakje een even grote kans heeft om onder te komen. Hoe kun je jezelf ervan overtuigen dat dit toch het geval is?

b Waarom kun je vraag a niet beantwoorden met een simulatie met de grafische rekenmachine?

c Neem aan, dat de dobbelsteen eerlijk is. Simuleer nu met behulp van de grafische rekenmachine 80 worpen met deze dobbelsteen. Maak een staafdiagram van de uitkomst.

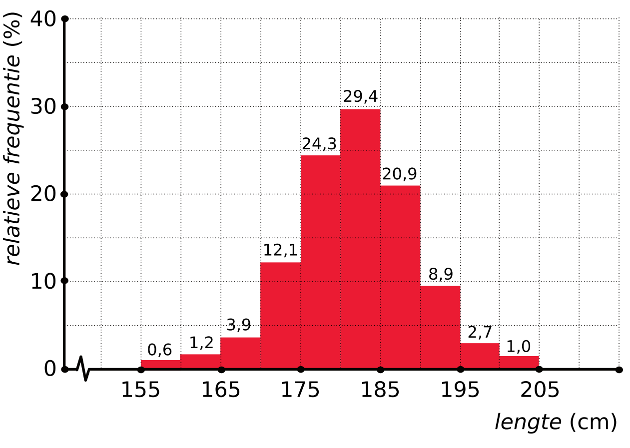
d Hoe groot is de experimentele kans op in totaal 4 ogen?

Opgave 16

Dit histogram laat de relatieve frequenties zien van de lichaamslengten van 500 soldaten.

Een fabrikant van legertruien gaat ervan uit dat deze relatieve frequenties opgaan voor alle soldaten in Nederland. Hij maakt truien in drie maten:

- S (small) voor soldaten tot 180 cm.
- M (medium) voor soldaten van 180 cm tot 190 cm.
- L (large) voor soldaten vanaf 190 cm.



Figuur 7

a Een soldaat krijgt een nieuwe trui. Hoe groot is de kans dat hij een trui van maat S moet hebben? Geef je antwoord in procenten.

b Bereken ook voor de andere twee maten de kans (in procenten) dat een trui van die maat nodig is.

c De commandant van een legerplaats bestelt 300 truien. Hoeveel van elke maat kan hij het beste kopen?

Opgave 17

Bij een onderzoek naar linkshandigheid is bij 9000 mensen gevraagd naar hun voorkeurshand. De resultaten vind je in de tabel in percentages. Ga ervan uit, dat deze gegevens maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

	linkshandig	rechtshandig
man	11,8	88,2
vrouw	9,6	90,4

Tabel 7

a Je komt op straat een Nederlandse man tegen. Hoe groot is de kans dat hij linkshandig is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Als je daarna een andere willekeurige Nederlander tegenkomt, hoe groot is dan de kans dat die een linkshandige persoon is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

c Hoeveel van de ondervraagde mensen waren linkshandig?

Practicum

Bekijk de applet.

Met de volgende practica kun je leren hoe je simulaties met de grafische rekenmachine kunt uitvoeren. Je vindt er ook informatie die je verderop bij dit onderwerp nodig hebt. Die kun je nu eerst even laten zitten.

- **Simulaties met de TI84**
- **Simulaties met de TInspire**
- **Simulaties met de Casio fx-CG50**
- **Simulaties met de HP Prime**
- **Simulaties met de NumWorks**

Je kunt ook eenvoudig met Excel kansspelen simuleren. Gebruik dit Excel-bestand: **Simulatie van kansspelen**.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.