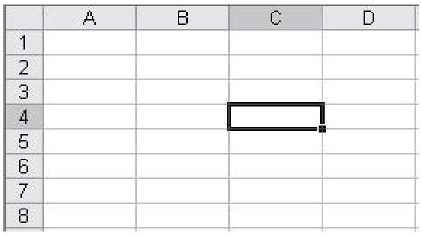
# 1.1 Het begrip matrix

## Inleiding

Een matrix is eigenlijk weinig meer dan een tabel met gegevens in rijen en kolommen. Het rekenblad Excel is eigenlijk één grote matrix van 256 × 65536 cellen (de grootte is afhankelijk van de versie van Excel). Hier zie je bijvoorbeeld cel C4 aangegeven.
In een matrix zet je getallen, in Excel kun je in een cel ook een formule zetten.
Je zult nu leren werken met matrices en zien waar je dit kunt toepassen.




**Figuur 1**

**Je leert in dit onderwerp**

- het begrip matrix;
- de begrippen element, rij en kolom van een matrix;
- matrices optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- matrices transponeren.

**Voorkennis**

- de basisbewerkingen met je grafische rekenmachine uitvoeren.

## Verkennen

### Opgave V1

Een schoenenwinkel heeft van een nieuw model wandelschoenen (de 'Strider') nog 76 paar in voorraad. Van de Strider bestaan drie varianten, die op de doos met A, B en C worden aangeduid. De Strider wordt voorlopig alleen in de maten 39, 40, 41 en 42 gemaakt. Hier zie je de voorraad tegen het eind van een bepaalde maand.
Voor de aankomende maand wil de eigenaar van de varianten A en B van elke maat 15 paar in huis hebben en van variant C van elke maat 10 paar.

| Voorraad wandelschoen Strider | | | |
|---|---|---|---|
| | variant | | |
| maat | A | B | C |
| 39 | 10 | 5 | 6 |
| 40 | 9 | 14 | 0 |
| 41 | 6 | 8 | 5 |
| 42 | 7 | 4 | 2 |

**Figuur 2**

Geef zijn bestelling weer in een vergelijkbare tabel als de voorraad. Hoe bepaal je die bestelmatrix?

## Uitleg

Een schoenenwinkel heeft van een nieuw model wandelschoenen (de 'Strider') nog 76 paar in voorraad. Van de Strider bestaan drie varianten, die op de doos met A, B en C worden aangeduid. De Strider wordt voorlopig alleen in de maten 39, 40, 41 en 42 gemaakt. Hier zie je de voorraad tegen het eind van een bepaalde maand.
Voor de aankomende maand wil de eigenaar van de varianten A en B van elke maat 15 paar in huis hebben en van variant C van elke maat 10 paar.

| Voorraad wandelschoen Strider | | | |
|---|---|---|---|
| | variant | | |
| maat | A | B | C |
| 39 | 10 | 5 | 6 |
| 40 | 9 | 14 | 0 |
| 41 | 6 | 8 | 5 |
| 42 | 7 | 4 | 2 |

**Figuur 3**

Laat je de randen van deze tabel weg, dan krijg je een **matrix** van 4 **rijen** en 3 **kolommen**. Dit heet een 4 × 3-matrix.
De bestelling kun je ook weergeven in zo'n 4 × 3-matrix.
Tel je beide op, dan krijg je de voorraad voor de nieuwe maand:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 9 & 14 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 6 & 1 & 10 \\ 9 & 7 & 5 \\ 8 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 10 \\ 15 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Je ziet hoe het optellen van matrices gaat. Overigens: de winkelier is natuurlijk uitgegaan van de nieuwe maandvoorraad en heeft zijn bestelmatrix gemaakt door van die nieuwe matrix de gegeven voorraadmatrix af te trekken.

### Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe een winkelier in Excel zijn voorraad van een bepaald type wandelschoen bijhoudt. Ga er van uit dat de voorraad is geteld op 30 april. Voordat zijn bestelling is aangekomen zijn er in mei al weer schoenen van het model ‘Strider’ verkocht. De tabel hiernaast geeft dat weer; het is de verkoopmatrix van de maand mei.

| Verkoop mei wandelschoen Strider | | | |
|---|---|---|---|
| | variant | | |
| maat | A | B | C |
| 39 | 4 | 2 | 6 |
| 40 | 5 | 4 | 0 |
| 41 | 5 | 7 | 2 |
| 42 | 3 | 4 | 1 |

Figuur 4

**a** Welk getal staat op de derde rij en in de tweede kolom?
En welke betekenis heeft dit getal?

**b** Bereken de nieuwe voorraadmatrix op het moment dat de bestelling op 1 juni binnenkomt.
Welke matrixbewerking past hierbij?

**c** Na een reclamecampagne op 31 mei, verwacht de winkelier in juni deze schoenen veel te gaan verkopen. Hij verdubbelt zijn voorraad diezelfde dag nog. Met welke matrixbewerking bereken je het verdubbelen van de voorraad?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **matrix** is een schema van getallen in rijen en kolommen.
Deze getallen zijn de **kentallen** van de matrix. Het kental $m_{i,j}$ staat in de $i$de rij en de $j$de kolom.
In deze matrix $M$ is $m_{2,3} = 0$.
Kentallen die naast elkaar staan vormen een **rij**.
Kentallen die onder elkaar staan vormen een **kolom**.
Het aantal rijen gevolgd door het aantal kolommen vormen de **afmetingen** van de matrix. Deze matrix $M$ bestaat uit 4 rijen en 3 kolommen. Hij heet daarom een 4 bij 3 matrix. Dit schrijf je als: 4 × 3-matrix.

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 9 & 14 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Twee matrices met dezelfde afmetingen kun je bij elkaar **optellen**. Je telt dan de kentallen op dezelfde rij en in dezelfde kolom bij elkaar op.
Twee matrices met dezelfde afmetingen kun je van elkaar **aftrekken**. Je trekt dan de kentallen op dezelfde rij en in dezelfde kolom van elkaar af.
Elke matrix kun je **met een getal vermenigvuldigen** door alle kentallen met dat getal te vermenigvuldigen.

### Voorbeeld 1

In een kledingzaak worden van een bepaald merk alleen witte en zwarte T-shirts verkocht in 5 verschillende maten. De voorraad van eind januari is:

- witte T-shirts: 8 stuks S, 15 stuks M, 12 stuks L, 7 stuks XL en 4 stuks XXL
- zwarte T-shirts: 3 stuks S, 10 stuks M, 13 stuks L, 8 stuks XL en 2 stuks XXL

De eerste week van februari worden er verkocht:

- witte T-shirts: 3 stuks S, 4 stuks M, 2 stuks L en 5 stuks XL
- zwarte T-shirts: 1 stuks S, 8 stuks M, 9 stuks L en 2 stuks XXL

Laat met een matrixberekening zien wat er aan het eind van die week nog aan voorraad is.

Antwoord

Denk er om dat beide matrices dezelfde afmetingen moeten hebben. Het kunnen allebei 2×5-matrices worden. Je krijgt dan:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & 12 & 7 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ga vooral ook na hoe je dit met de grafische rekenmachine doet.

## Opgave 2

In de **Theorie** wordt het begrip matrix ingevoerd. Hier zie je de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**a** Hoeveel kentallen heeft matrix $M$?

**b** Hoeveel kolommen heeft matrix $M$?

**c** Hoeveel rijen heeft deze matrix?

**d** Welk kental staat er in de tweede rij en in de derde kolom?

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt de voorraad berekend door twee $2 \times 5$-matrices van elkaar af te trekken.

**a** Zowel de voorraad als de verkoop kan in een $5 \times 2$-matrix worden weergegeven. Doe dat en bereken de nieuwe voorraadmatrix.

**b** Bekijk op de website hoe je matrices in je grafische rekenmachine invoert.

**c** Voer de matrixoptelling van a ook met de grafische rekenmachine uit.

## Voorbeeld 2

Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Bereken $2 \cdot A + B$.

Antwoord

$$2 \cdot A + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -2 & 6 \\ 0 & 10 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Doe dit ook op de GR.

## Opgave 4

Gegeven zijn de volgende matrices

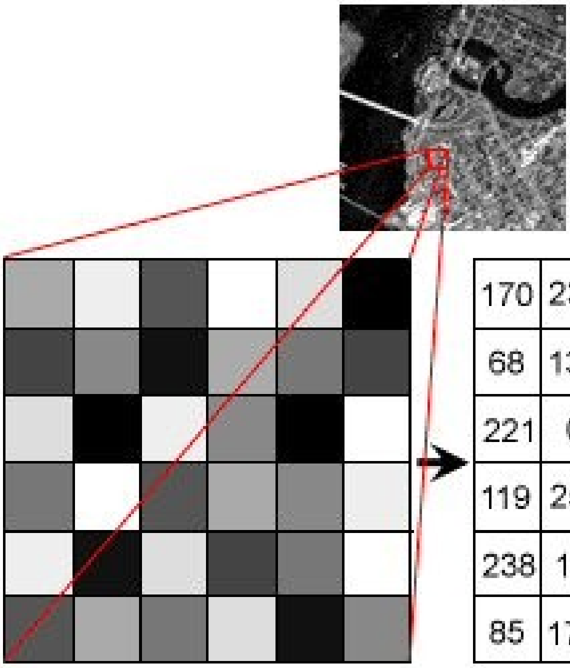
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 15 \\ 5 & 12 & 10 \end{pmatrix} \text{ en } C = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 0 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

**a** Welk getal is $c_{3,1}$?

**b** Bereken voor zover mogelijk $A + C$, $A + B$, $5A - C$.

**c** Ga ook na hoe dit op de grafische rekenmachine gaat.

## Voorbeeld 3



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 170 | 238 | 85 | 255 | 221 | 0 |
| 68 | 136 | 17 | 170 | 119 | 68 |
| 221 | 0 | 238 | 136 | 0 | 255 |
| 119 | 255 | 85 | 170 | 136 | 238 |
| 238 | 17 | 221 | 68 | 119 | 255 |
| 85 | 170 | 119 | 221 | 17 | 136 |

**Figuur 5**

Een mooi voorbeeld van een matrix is een digitaal zwart/wit plaatje. Dit bestaat uit pixels en elke pixel heeft een grijswaarde lopend van 0 (zwart) t/m 255 (wit). Een normaal plaatje is bijvoorbeeld 200 px breed en 150 px hoog. Het plaatje is dan een digitale $150 \times 200$-matrix met getallen vanaf 0 t/m 255.
Fotobewerkingsprogramma’s kunnen zo’n plaatje 20% lichter maken. Je vermenigvuldigt dan alle pixelwaarden met 1,2. Let wel: alle waarden worden afgerond op een geheel getal en alle getallen boven de 255 worden automatisch 255 (witter dan wit kan niet).
Hier zie je een deel van een plaatje als $6 \times 6$-matrix. Maak dit plaatje 20% lichter.

Antwoord

$$1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 170 & 238 & 85 & 255 & 221 & 0 \\ 68 & 136 & 17 & 170 & 119 & 68 \\ 221 & 0 & 238 & 136 & 0 & 255 \\ 119 & 255 & 85 & 170 & 136 & 238 \\ 238 & 17 & 221 & 68 & 119 & 255 \\ 85 & 170 & 119 & 221 & 17 & 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 & 286 & 102 & 306 & 265 & 0 \\ 82 & 163 & 20 & 204 & 143 & 82 \\ 265 & 0 & 286 & 163 & 0 & 306 \\ 143 & 306 & 102 & 204 & 163 & 286 \\ 286 & 20 & 265 & 82 & 143 & 306 \\ 102 & 204 & 143 & 265 & 20 & 163 \end{pmatrix}$$

wordt:

$$\begin{pmatrix} 204 & 255 & 102 & 255 & 255 & 0 \\ 82 & 163 & 20 & 204 & 143 & 82 \\ 255 & 0 & 255 & 163 & 0 & 255 \\ 143 & 255 & 102 & 204 & 163 & 255 \\ 255 & 20 & 255 & 82 & 143 & 255 \\ 102 & 204 & 143 & 255 & 20 & 163 \end{pmatrix}$$

### Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je dat een zwart-wit-plaatje (als bitmap) eigenlijk een grote matrix is. Werk met de $6 \times 6$-matrix die in het voorbeeld is gegeven.

**a** Maak het plaatje 70% donkerder en bereken de nieuwe pixelwaarden (op gehelen nauwkeurig).

**b** Waarom kun je bij a alle kentallen van de matrix met hetzelfde getal vermenigvuldigen en kon dit in het voorbeeld niet?

# Verwerken

## Opgave 6

Een fabrikant van filterkoffie heeft drie variëteiten in de handel, te weten ‘Roodmerk’, ‘Zilvermerk’ en ‘Goudmerk’. In een bepaalde stad verkoopt een supermarktketen de verschillende variëteiten koffie in drie filialen. In een centraal magazijn worden de voorraden opgeslagen. Daar wordt ook per filiaal de voorraad beheerd. Elke dag worden de filialen vanuit dat centrale magazijn bevoorraad. De volgende tabel geeft de voorraad per filiaal, de inkoopprijs en de verkoopprijs van elk van de drie koffievarianten weer.

| | Roodmerk | Zilvermerk | Goudmerk |
|---|---|---|---|
| filiaal 1 | 400 | 200 | 600 |
| filiaal 2 | 500 | 400 | 0 |
| filiaal 3 | 500 | 700 | 200 |
| inkoopprijs | 4,70 | 4,90 | 5,25 |
| verkoopprijs | 5,15 | 5,30 | 5,90 |

**Tabel 1**

De voorraadgegevens zijn van maandagochtend.

**a** Stel een voorraadmatrix $V$ op waarin de voorraad per variant per filiaal op maandagochtend staat.

De filialen krijgen meteen op maandagochtend nieuwe voorraad. De volgende tabel geeft de bestelling weer:

| | Roodmerk | Zilvermerk | Goudmerk |
|---|---|---|---|
| filiaal 1 | 200 | 100 | 0 |
| filiaal 2 | 100 | 200 | 400 |
| filiaal 3 | 100 | 0 | 300 |

**Tabel 2**

**b** Stel de bijbehorende bestelmatrix $B$ op.

**c** Bereken $V + B$. Welke betekenis heeft $V + B$?

Hier zie je wat er die maandag aan koffie werd verkocht:

| | Roodmerk | Zilvermerk | Goudmerk |
|---|---|---|---|
| filiaal 1 | 264 | 300 | 410 |
| filiaal 2 | 306 | 233 | 391 |
| filiaal 3 | 412 | 530 | 199 |

**Tabel 3**

**d** Stel de verkoopmatrix $K$ op.

**e** Bereken $V + B - K$. Welke betekenis heeft $V + B - K$?

Je kunt een winstmatrix $W$ opstellen, waarin per variant het verschil van de inkoopprijs en de verkoopprijs staat.

**f** Stel een winstmatrix $W$ op.

**g** Hoe kun je met die winstmatrix en de verkoopmatrix berekenen hoeveel de verkoop op maandag per filiaal aan winst heeft opgebracht? Bereken die winst voor filiaal 1.

**h** Hoe kun je met die winstmatrix en de verkoopmatrix berekenen hoeveel de verkoop op maandag per koffievariant aan winst heeft opgebracht? Bereken die winst voor Roodmerk koffie.

### Opgave 7

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 12 & -4 & 5 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \text{ en } C = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -12 & 6 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}.$$

**a** Welk getal is $b_{2,3}$?

**b** Bereken indien mogelijk $A+B$, $B-2A$, $A+3C$.

### Opgave 8

Een bedrijf heeft vestigingen in Apeldoorn, Deventer en Zutphen. De afstanden tussen deze vestigingen bedragen:

- Van de vestiging in Apeldoorn naar die in Deventer 17 km.
- Van de vestiging in Zutphen naar die in Deventer 13 km.
- Van de vestiging in Apeldoorn naar die in Zutphen 26 km.

**a** Geef de afstanden tussen de vestigingen weer in een $3 \times 3$-matrix $A$.

**b** De gemiddelde reistijd tussen deze plaatsen is 40 km/uur. Stel een reistijdenmatrix $R$ tussen de vestigingen van dit bedrijf op. Geef de reistijden in minuten.

**c** Waarom zal matrix $R$ zeer waarschijnlijk geen erg betrouwbare reistijden weergeven?

## Testen

### Opgave 9

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 10 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -5 \\ 12 & -5 & 10 \end{pmatrix} \text{ en } C = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -12 & 6 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}.$$

**a** Welk getal is $a_{1,2}$?

**b** Bereken indien mogelijk $A+B$, $B+C$, $3A-2B$.

### Opgave 10

Autobedrijf Dankers verkoopt de Smart Fortwo zowel in filiaal Noord als in filiaal Zuidwijk. De Smart Fortwo is er in verschillende uitvoeringen: de ‘pure’, de ‘pulse’, de ‘passion’ en de ‘Brabus’. De verkoopcijfers voor filiaal Noord waren in mei achtereenvolgens 4 keer de pure, 5 keer de pulse, 8 keer de passion en 2 keer de Brabus. In juni waren de verkoopcijfers in dezelfde volgorde 5, 3, 7 en 1 stuks. Voor filiaal Zuidwijk waren de verkoopcijfers in mei 8 pure, 6 pulse, 9 passion en 5 Brabus en in juni 10 pure, 5 pulse, 11 passion en 4 Brabus.

**a** Geef de verkoopcijfers van filiaal Noord weer in een $2 \times 4$-matrix $N$.

**b** Geef de verkoopcijfers van filiaal Zuidwijk in eenzelfde matrix $Z$ weer.

**c** Bereken $N+Z$. Welke betekenis heeft deze matrix?

**d** Hoe kun je de totale verkoopcijfers van beide filialen samen berekenen?

## Practicum

Met het volgende practicum leer je rekenen met matrices op de grafische rekenmachine.

- **Matrices met de TI84**
- **Matrices met de Casio fx-CG50**
- **Matrices met de TInspire**
- **Matrices met de HPprime**
- **Matrices met de NumWorks**