

2.1 Symmetrie

Inleiding

Je ziet hier een foto van een Arabisch mozaïek in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in Granada, Spanje. Veel van de figuren zijn symmetrisch en dat betekent dat veel afmetingen hetzelfde zijn.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- symmetrie van vlakke figuren herkennen, beschrijven en ermee rekenen;
- symmetrie van ruimtelijke figuren herkennen, beschrijven en ermee rekenen.

Voorkennis

- lijnsymmetrie, puntsymmetrie en draaisymmetrie in vlakke figuren herkennen en beschrijven;
- rekenen met verhoudingen en de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de foto van een Arabisch mozaïek in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in Granada, Spanje.

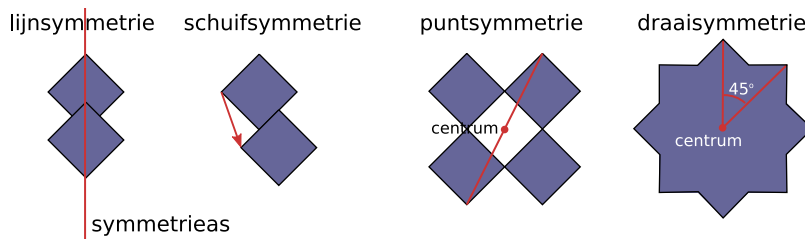
Welke vormen van symmetrie komen hierin voor? Let niet op beschadigingen.



Figuur 2

Uitleg 1

Bekijk de symmetrische vlakke figuren (2-dimensionale of 2D figuren).



Figuur 3

- Bij lijnsymmetrie (ofwel spiegelsymmetrie) is er een symmetrieas:
Alle punten van de figuur liggen door spiegelen in de symmetrieas weer op de figuur.
De figuur wordt door de spiegellijn in twee (gespiegelde) identieke delen verdeeld.
- Bij schuifsymmetrie kan een deel van de figuur worden verschoven naar een identiek ander deel van de figuur.
- Bij rotatiesymmetrie (ofwel draaisymmetrie) zie je na roteren (draaien) om het centrum van symmetrie weer dezelfde figuur.
De kleinste hoek waarover je kunt draaien, heet de kleinste draaihoek.
- Bij puntsymmetrie past bij elk punt van de figuur een punt precies aan de andere kant van het centrum van symmetrie.
Dit komt in het platte vlak overeen met draaien over 180° om het centrum.

Twee figuren (of delen van een figuur) die identiek zijn hebben alle hoeken en alle zijden gelijk. Je noemt ze congruent.

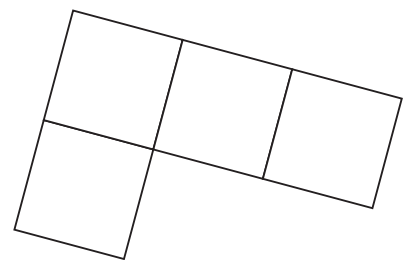
Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Zijn er bij de puntsymmetrische figuur ook andere symmetrieën?
- Zijn er bij de draaisymmetrische figuur ook andere symmetrieën?
- Waarom is puntsymmetrie in het platte vlak geen afzonderlijke vorm van symmetrie?

Opgave 2

Bekijk de figuur. Deze staat ook op het [werkblad](#). Door een extra vakje, kun je een figuur maken die een symmetrieas heeft. Hoeveel mogelijkheden zijn er? Teken de mogelijkheden. Geef de symmetrieassen aan.



Figuur 4

Opgave 3

Welke bekende vlakke figuur is draaisymmetrisch over elke hoek?

Uitleg 2

Bij de spiegelsymmetrie van ruimtelijke figuren (in 3D dus) is er niet van een spiegellijn, maar van een spiegelvlak sprake.

Je ziet dat een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ spiegelsymmetrisch is.

De éne helft van de piramide is het spiegelbeeld van de andere helft.

Deze piramide heeft vier symmetrievlakken. Een figuur met één of meer symmetrievlakken heet een spiegelsymmetrisch lichaam.

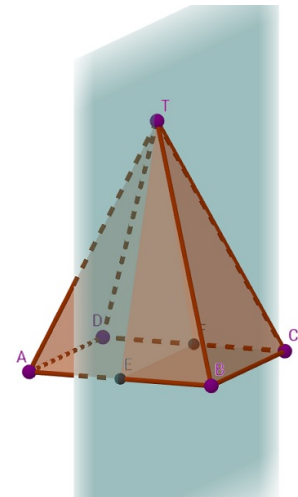
De piramide kent ook rotatiesymmetrie. Hier is echter geen centrum van rotatiesymmetrie maar een omwentelingsas, de lijn door T en het snijpunt van AC en BD (het midden van het vierkante grondvlak).

Deze piramide heeft één omwentelingsas.

Er zijn ook ruimtefiguren die een symmetriecentrum hebben, bijvoorbeeld de kubus en de bol.

Bij ruimtefiguren kan ook sprake zijn van schuifsymmetrie, denk bijvoorbeeld aan een rij identieke pilaren.

De hier genoemde symmetrieën geven altijd congruente vormen. Omdat congruente vormen dezelfde afmetingen hebben, zijn ook de lengtes, oppervlaktes, inhoud en hoeken van de twee congruente figuren gelijk.



Figuur 5 Figuur opent via muisklik
Dan draaibaar met rechter muisknop

Opgave 4

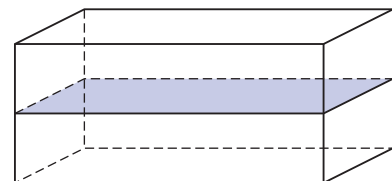
Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide in **Uitleg 2**.

- Door welke punten gaat het getekende symmetrievlak?
- Welke andere symmetrievlakken zijn er?
- Waarom is deze piramide ook rotatiesymmetrisch?
- Hoeveel symmetrieassen heeft een kubus? En welk punt is het centrum van symmetrie? En hoeveel symmetrievlakken heeft een kubus

Opgave 5

Bekijk de balk met daarin een spiegelvlak. Deze staat ook op het **werkblad**.

- De balk heeft nog twee spiegelvlakken. Teken die.
- Hoeveel draaiassen heeft de balk? Geef de kleinste hoek waarover de balk dan draaisymmetrisch is.



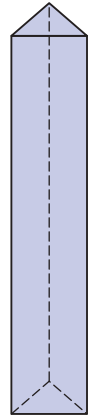
Figuur 6

Opgave 6

Bekijk de figuur.

Het grondvlak van het prisma is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 10 cm. De hoogte van het prisma is 50 cm.

- Hoeveel spiegelvlakken heeft het prisma?
- Geef aan op hoeveel manieren het prisma draaisymmetrisch is. Geef ook steeds de kleinste draaihoek.
- Bereken de oppervlakte van het grondvlak.
- Bereken de inhoud van het prisma.
- Als de afmetingen van het prisma twee keer zo groot worden, wat gebeurt er dan met de oppervlakte van het grondvlak?
- Als de afmetingen van het prisma twee keer zo groot worden, wat gebeurt er dan met de inhoud?

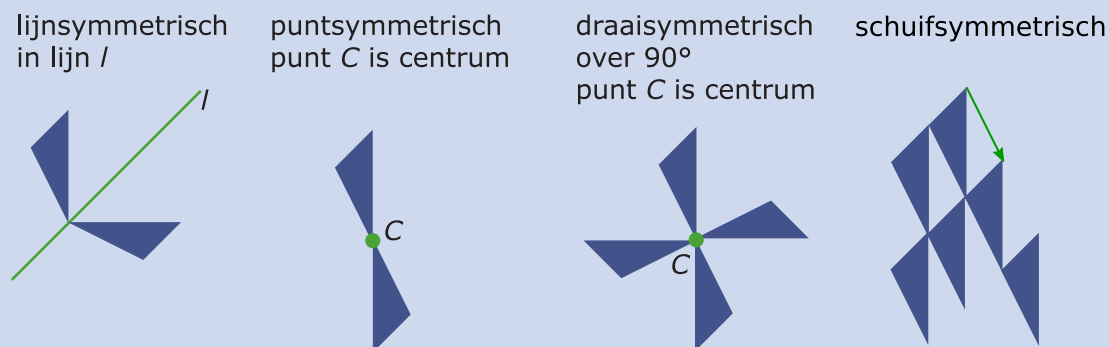


**Fi-
guur
7**

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er is sprake van **symmetrie** als een figuur bestaat uit twee delen die door spiegelen, draaien of verschuiven op elkaar passen. Hier zie je de vier soorten symmetrie uitgebeeld in vlakke figuren, in 2D.



Figuur 8

Er is verschil tussen symmetrie in 2D-figuren en die in 3D-figuren.

- In 2D heet **spiegelsymmetrie** ook wel **lijnsymmetrie** en is sprake van een symmetrieas. In 3D is bij spiegelsymmetrie sprake van een **symmetrievlak**.
- In 2D heb je bij **rotatiesymmetrie** of **draaisymmetrie** een symmetriecentrum en een kleinste draaihoek. In 3D heb je bij rotatiesymmetrie of draaisymmetrie een symmetrieas en een kleinste draaihoek.
- In 2D is **puntsymmetrie** hetzelfde als rotatie over 180° . In 3D is er puntsymmetrie als bij elk punt van de figuur een ander punt van de figuur hoort dat evenver van het symmetriecentrum af ligt, maar wel op dezelfde lijn naar het symmetriepunt.
- Bij **schuifsymmetrie** zie je steeds een (deel van een) figuur die je door verschuiving naar een identiek ander (deel van de) figuur kunt verschuiven.

Bij symmetrie heb je vaak figuren (of delen van een figuur) die identiek zijn, dus alle hoeken en alle zijden gelijk hebben. Je noemt ze dan **congruent**. Vaak kent een figuur meerdere soorten symmetrie.

Voorbeeld 1

Bekijk de foto van een wandversiering in het middeleeuwse paleis en fort Alhambra in de stad Granada in Spanje.

**Figuur 9**

Beschrijf welke vormen van symmetrie er in deze wandversiering te herkennen zijn. Ga ervan uit dat de figuur oneindig door gaat.

Antwoord

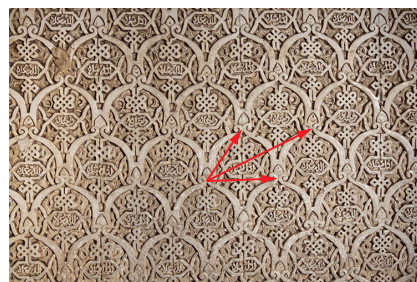
Er is lijnsymmetrie en schuifsymmetrie te herkennen in de wandversiering.

De lijnsymmetrie is zichtbaar als je verticale lijnen trekt door de eindpunten van de boogstukken.

Er is sprake van schuifsymmetrie in verschillende richtingen. Hier zijn er drie getekend.



lijnsymmetrie



schuifsymmetrie

Figuur 10**Opgave 7**

Bekijk de wandversiering in **Voorbeeld 1**. De kleinste horizontale afstand waarover schuifsymmetrie kan worden toegepast is in werkelijkheid ongeveer 20 cm.

- a** Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het gefotografeerde deel van de wandversiering in werkelijkheid ongeveer? Geef de oppervlakte in vierkante meters.
- b** Veronderstel dat de kleinste afstand niet 20 cm, maar de helft daarvan zou zijn. Hoeveel keer zo klein zou de oppervlakte van de wandversiering in het echt dan zijn?
- c** Bekijk het voorbeeld. Veronderstel dat de kleinste afstand waarover schuifsymmetrie kan worden toegepast niet 20 cm, maar dat deze drie keer zo groot zou zijn. Hoeveel keer zo groot zou de oppervlakte van de wandversiering in het echt dan zijn?

Opgave 8

Bekijk de afbeelding van een gepleisterde muur in het Alhambra. Veronderstel dat het patroon doorloopt.

- a** Welke symmetrieën zijn te herkennen in dit patroon?

Bekijk de figuur met een detail van de gepleisterde muur.



Figuur 12



Figuur 11

- b** Hoeveel centra van rotatiesymmetrie zijn te herkennen in het patroon?
- c** Bij hoeveel van deze punten hoort geen rotatie over 90° ?
- d** Veronderstel dat het vierkantje waarin de bloem zich bevindt in werkelijkheid 20×20 cm is. Hoe groot is dan ongeveer de oppervlakte in werkelijkheid van het deel dat is afgebeeld? Geef je antwoord in m^2 .

Voorbeeld 2

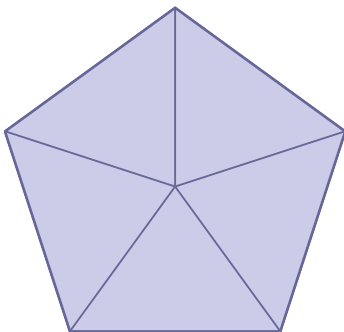
Teken een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 72° waarvan de benen even lang zijn en een lengte van 3 cm hebben.

Roteer de driehoek om de top, steeds over 72° .

Wat voor figuur ontstaat er?

Antwoord

Een gelijkzijdige vijfhoek.



Figuur 13

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Wat voor figuur krijg je als je een rechthoekige gelijkbenige driehoek steeds 90° draait om de tophoek?
- Hoe groot moet de tophoek van een gelijkbenige driehoek zijn als op deze manier een achthoek moet worden gemaakt?
- Hoe groot moet de tophoek zijn als het een zevenhoek moet worden? Geef je antwoord in één decimaal.

Opgave 10

Wat voor figuur krijg je als je een rechthoekige gelijkbenige driehoek 90° draait om de tophoek, en die dan vastplakt aan de oorspronkelijke driehoek?

Voorbeeld 3

Welke (bekende) symmetrieën zitten er in een kubus?

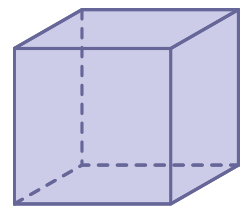
Hoeveel hoeken van 90° worden gevormd door ribben van een kubus die in een hoekpunt samenkomen?

Antwoord

In een kubus zit spiegelsymmetrie en rotatiesymmetrie.

In elk hoekpunt maken de ribben drie rechte hoeken. Er zijn acht hoekpunten in een kubus.

In totaal maken de ribben in een kubus $8 \cdot 3 = 24$ rechte hoeken.

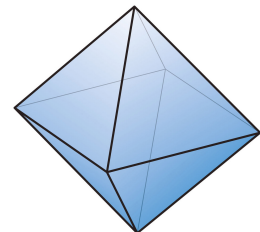


Figuur 14

Opgave 11

Bekijk het regelmatig achthoekvlak (een octaëder).

- Welke symmetrieën zitten er in het reguliere achthoekvlak?
- Hoeveel hoeken van 60° worden er gevormd door ribben die samenkomen in een hoekpunt?

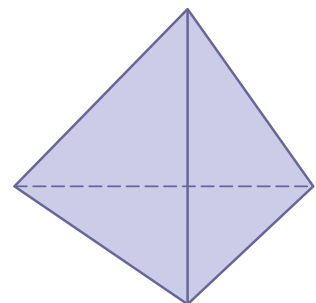


Figuur 15

Opgave 12

Een regelmatig viervlak is een ruimtelijk figuur die bestaat uit vier gelijkzijdige driehoeken. De figuur is spiegel- en draaisymmetrisch.

- Hoeveel symmetrievlakken heeft deze figuur?
- Geef het aantal rotatieassen waarbij de figuur draaisymmetrisch is. Geef ook de kleinste draaihoek.
- Is er ook een rotatiecentrum?

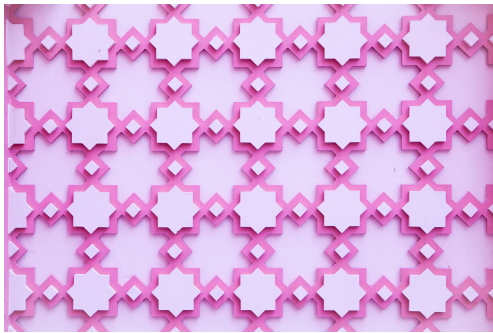


Figuur 16

Verwerken

Opgave 13

Bekijk de afbeelding. In de textuur van Arabische tegels zit 2D-symmetrie.



Figuur 17

Welke soort(en) symmetrie zie je? Je mag ervan uitgaan dat het patroon doorloopt. Met de schaduwen hoef je geen rekening te houden.

Opgave 14

Bekijk de foto van verschillend gekleurde appartementengebouwen in Zoetermeer.

- a Welke vorm van symmetrie is zichtbaar als je niet op de kleur let?

De afmetingen van een gebouw zijn ongeveer $15 \times 20 \times 30$ ($h \times d \times b$) meter. De gebouwen staan los van elkaar. Een schilder wil een schatting maken van de kosten om de gebouwen te schilderen.

- b Bereken de totale oppervlakte van het schilderwerk. Ga er voor het gemak van uit dat de gebouwen balkvormig zijn en geen ramen hebben.



Figuur 18

Opgave 15

Bekijk de afbeelding. Het glas-in-loodraam is in barokke stijl getekend.

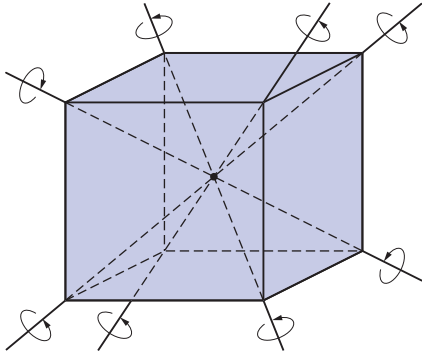
- a Welke 2D-symmetrieën bevat het? Is er ook sprake van puntsymmetrie?
- b Het raam bestaat uit een dik houten frame met daarin aparte glas-in-loodraampjes en dunnere loden draden. Aanvankelijk gaf de opdrachtgever maten door aan de kunstenaar, maar later bleek dat deze maten 20% groter moesten zijn. Hoeveel procent hoger zal de kunstenaar de bedragen voor glas en hout moeten maken?
- c De hoogte van het raam is 160 cm, de breedte 80 cm. Hoeveel meter van het dikke houten frame heeft de kunstenaar dan nodig? Houten frame wordt alleen verkocht in veelvouden van meters.



Figuur 19

Opgave 16

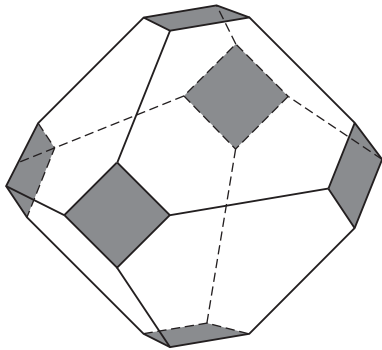
In de kubus zijn vier rotatie-assen getekend.
Hoeveel graden is de kleinste draaihoek bij deze assen?



Figuur 20

Opgave 17

Bekijk de afgeknotte octaëder (regelmatig achthvlak).
Hoeveel symmetrievlakken heeft de afgeknotte octaëder?



Figuur 21

Toepassen**Opgave 18: Torre del Mangia**

Er kunnen verschillende symmetrieën gelijktijdig in een gebouw voorkomen. Bekijk de Torre del Mangia in Siena in Italië.

- Welke soorten symmetrie herken je in de kantelen bovenop de toren? Licht je antwoord toe.
- Bekijk van deze toren alleen de vorm. In deze vorm zit onder andere rotatiesymmetrie. Hoe groot is de rotatiehoek?
- Waar zit de omwentelingsas? Welke vorm heeft deze as? Welke richting heeft deze as?
- Veronderstel dat de toren kan worden gedraaid om de omwentelingsas en er wordt één rondje gedraaid. Hoeveel keer per rondje zie je geen verschil met de foto?
- In de toren is nog een andere vorm van symmetrie te herkennen. Welke is dit? En hoeveel mogelijkheden zijn er?

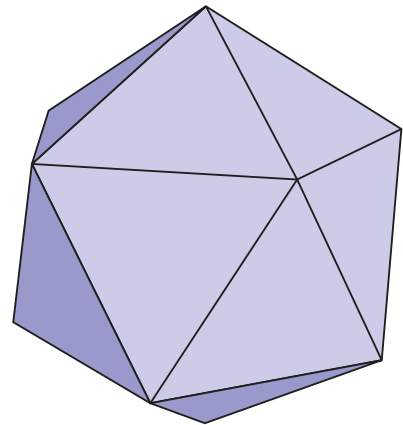


Figuur 22

Opgave 19: Icosaëder

Bekijk het regelmatig twintigvlak. Deze ruimtelijke figuur heet een icoesaëder. De figuur bestaat uit twintig gelijkzijdige driehoeken. Het is één van de vijf regelmatige veelvlakken.

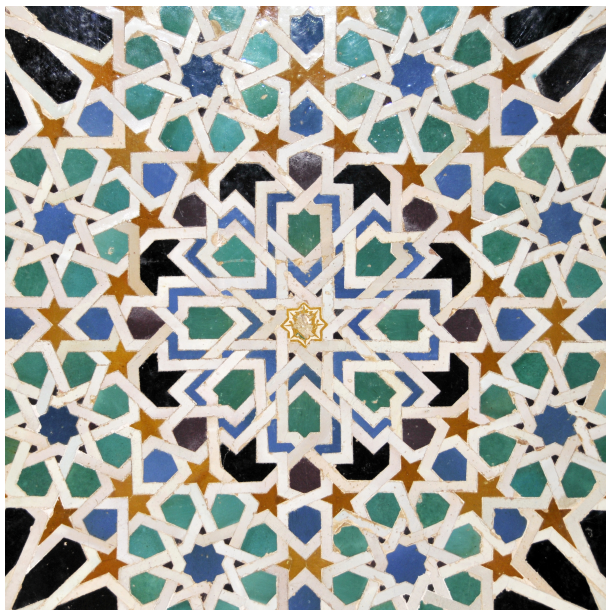
- a Hoeveel hoekpunten heeft deze figuur?
- b Hoeveel ribben heeft deze figuur?
- c De figuur bevat verschillende soorten draaisymmetrie. Beschrijf over welke hoeken er draaisymmetrie voorkomt, en hoeveel rotatie-assen er zijn.



Figuur 23

Testen**Opgave 20**

Hier zie je een foto gemaakt in het Alhambra te Granada. Let alleen op de gekleurde (niet witte) figuurtjes.



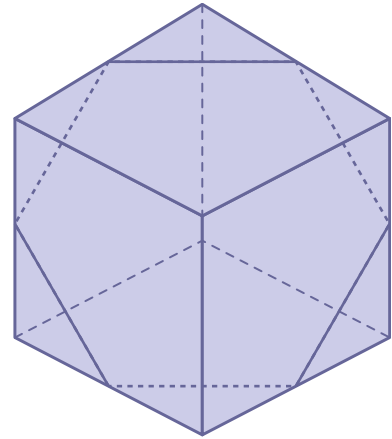
Figuur 24

- a Hoeveel van die figuurtjes hebben precies twee symmetrieassen?
- b Welke van die figuurtjes hebben meer symmetrieassen? Hoeveel hebben die er?
- c Zijn er ook draaisymmetrische figuren?

Opgave 21

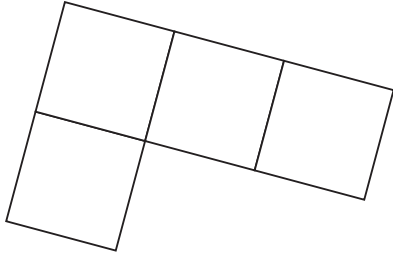
Deze figuur stelt een kubus voor met daarin een regelmatige vlakke zeshoek.

- a** Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige (vlakke) zeshoek?
- b** De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot worden de hoeken van de kubus?
- c** De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot de oppervlakte van de zeshoek in de kubus?
- d** De ribbe van de kubus in de afbeelding wordt drie keer zo groot. Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van de kubus?
- e** Hoeveel symmetrievlakken heeft deze figuur?
- f** Hoeveel rotatieassen heeft deze figuur?

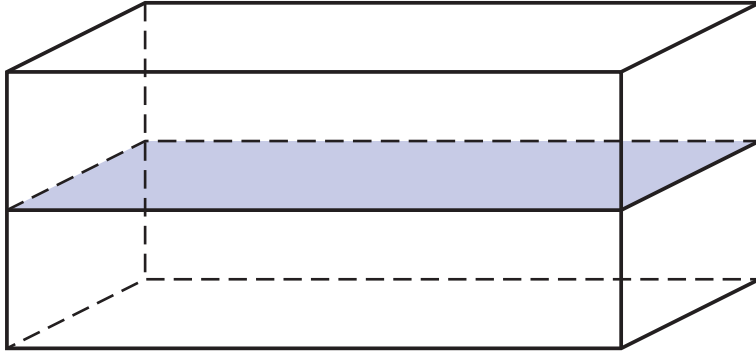


Figuur 25

Werkblad bij Opgave 2 op pagina 2.



Werkblad bij Opgave 5 op pagina 3.





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
