

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Verhoudingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Merk op de je de formule voor de oppervlakte van een cirkel en een kegel alsmede die voor de inhoud van een bol niet hoeft te kennen; als ze nodig zijn worden ze gegeven of mag je ze opzoeken. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- oppervlakte — omtrek — stelling van Pythagoras
- inhoud
- gelijkvormigheid — verhouding — Gulden Snede
- lengte-, oppervlakte-, inhoudsvergrotingsfactor
- lijn-, punt- en draaisymmetrie

Activiteitenlijst

- omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoek, driehoek, cirkel — oppervlakte berekenen van (samengestelde) ruimtelijke figuren
- inhoud berekenen van prisma/cilinder en piramide/kegel en daaruit samengestelde ruimtelijke figuren
- rekenen met gelijkvormigheid en verhoudingstabellen, verhoudingen — werken met de Gulden Snede
- werken met vergrotingsfactoren
- werken met regelmatige veelhoeken — in vlakke figuren symmetrie herkennen en benoemen

Achtergronden

Al in de vroege Oudheid hield men zich bezig met het berekenen van oppervlakte en inhoud. Veel berekeningsmethoden waren al aan de Babyloniërs en de Oude Egyptenaren bekend en zijn ook op kleitabletten en in hiërogliefen beschreven. Een belangrijk probleem was de **kwadratuur van de cirkel**: de vraag of het mogelijk is om een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.

Als dit mogelijk zou zijn, was ook de oppervlakte van de cirkel als een exacte breuk te schrijven. Benaderingsmethoden voor die oppervlakte kende men al wel, een heel bekende is de **uitputtingsmethode van Eudoxus**.

De afgebeelde Griekse wetenschapper **Archimedes (287–212 v.Chr.)** hield zich veel met berekening van oppervlakte en inhoud bezig. Bijvoorbeeld in zijn boek: 'Over de bol en de cilinder'.

In het eerste gedeelte laat Archimedes zien dat de oppervlakte van een bol vier keer de omtrek van een grootcirkel op die bol is, bepaalt hij de oppervlakte van bolsegment en laat hij zien dat de inhoud van een bol $\frac{2}{3}$ is van de inhoud van de omhullende cilinder.

In het tweede gedeelte wordt getoond hoe een bol door een plat vlak in twee delen met een vooraf gegeven verhouding kan worden verdeeld. Bij deze berekeningen gebruikte Archimedes de uitputtingsmethode van Eudoxus.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Op de binnenplaats van het museum Catharijneconvent in Utrecht staat een kunstwerk van Max Bill. Het kunstwerk is opgebouwd uit twaalf balken. Deze balken hebben alle dezelfde afmetingen: 42 bij 42 bij 210 centimeter. Elke laag van het kunstwerk bestaat uit twee horizontale, evenwijdig geplaatste balken. Het kunstwerk past precies in een doos van 210 bij 210 bij 252 centimeter.

Bereken welk percentage van de inhoud van zo'n doos wordt ingenomen door de twaalf balken.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2014, tweede tijdvak)



Figuur 2

Opgave 2

Het Prisma van Sanherib is de benaming van een prisma van klei, dat op de zes zijden een Akkadische historische tekst draagt, daterend uit de regering van de Assyrische koning Sanherib. Het grondvlak is een regelmatige zeshoek. De hoogte is 38 centimeter en de totale breedte, gemeten van hoekpunt naar hoekpunt, is 14 centimeter. De oppervlakte van de zeshoek is ongeveer 127 cm^2 .

- Bereken de oppervlakte van de zeshoek in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de inhoud van het prisma van Sanherib in cm^3 nauwkeurig.

(naar: voorbeeldopgave Syllabus centraal examen wiskunde C 2018)

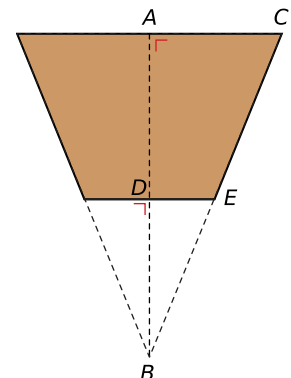


Figuur 3

Opgave 3

Een plastic koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 millimeter, die van de bovencirkel 64 millimeter en de hoogte 90 millimeter.

- Bekijk de tekening van de verticale doorsnede van het bekertje met daarbij de oorspronkelijke kegel.
Neem de tekening over en schrijf de lengtes erbij die bekend zijn. Geef aan welke driehoeken gelijkvormig zijn.
- Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in milliliter.
- Bereken de oppervlakte aan plastic in mm^2 .



Figuur 4

Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan plastic waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffie beker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het plastic blijft hetzelfde.

- d Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Opgave 4

Bekijk het pentagramprisma. Dat is een prisma met een pentagram als grondvlak.

Het grondvlak bestaat uit een regelmatige vijfhoek met zijden van 1 dm, en uit vijf gelijkbenige driehoeken met twee zijden van 1,618 dm en één zijde van 1 dm. De hoogte van het prisma is gelijk aan de lengte van de diagonalen van het pentagram.

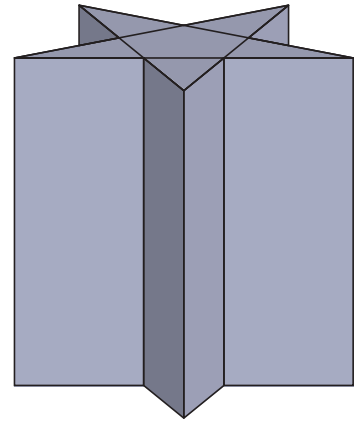
- a Een pentagram wordt onder andere als bijzonder beschouwd omdat de verhouding volgens de gulden snede zich hierin bevindt. Zoek uit waar deze verhouding zich bevindt.

Er is een formule waarmee je de oppervlakte van een regelmatige vijf-

hoek kunt berekenen: $\text{oppervlakte vijfhoek} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 \cdot \sqrt{5} + 25} \cdot z^2$

Hierin is z de lengte van de zijden van de vijfhoek.

- b Bereken de oppervlakte van het grondvlak van het pentagramprisma in dm^2 en rond je antwoord af op twee decimalen.
- c Bereken de inhoud van het pentagramprisma in dm^3 en rond je antwoord af op één decimaal.
- d Druk de hoogte h van dit pentagramprisma uit in φ .
- e Druk de oppervlakte O van een gelijkbenige driehoek in het grondvlak uit in φ .
- f Druk de inhoud I van dit pentagramprisma uit in φ . Gebruik voor de oppervlakte van de vijfhoek een getal afgerond op twee decimalen.



Figuur 5

Opgave 5

Je ziet hier een fraaie vlakvulling die naar alle zijden eindeloos door loopt. De figuur staat ook op het [werkblad](#).

Neem aan dat de lengte van het lijnstuk dat elke blauwe hagedis in twee gelijke delen verdeelt 6 cm is.

- a Teken alle symmetrieassen van deze vlakvulling.
- Je ziet na het tekenen van de symmetrieassen dat de figuur is opgebouwd uit regelmatige zeshoeken met op elke zijde een hagedis.
- b Bereken de oppervlakte van deze regelmatige zeshoeken in mm^2 nauwkeurig.
- c Bereken de afstand tussen twee neuzen van hagedissen die met de staarten maar niet met de neuzen tegen elkaar aan zitten in mm nauwkeurig.



Figuur 6

Toepassen

Opgave 6: De 'kegel' van Marius van der Made

Marius van der Made maakte deze 'kegel'. De doorsnede van het grote cirkelvormige deel van de kegel is 1,50 m. De doorsnede van het kleinere cirkelvormige deel van de kegel is 50 cm. Als de kegel op de grond staat met de punt omhoog, is de hoogte 3 meter. Het achtere deel van de kegel is 'weggesneden'. De top van de kegel ligt recht boven het midden van het grondvlak. Veronderstel dat het oppervlak van de kegel een speciale behandeling nodig heeft. Deze behandeling kost € 50 euro per m².

Bereken de kosten van deze behandeling.



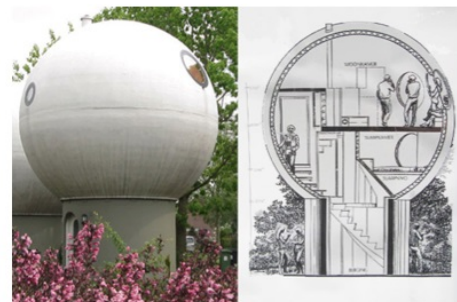
Figuur 7

Opgave 7: Bolwoningen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in 's-Hertogenbosch. De bolwoning is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk, door de bolvorm heeft de wind er bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor 1 of 2 personen.

De diameter van de bol zelf is 8 meter en die van de cilinder is 6 meter, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is. Voor de oppervlakte A van een bolsegment met hoogte h van een bol met straal r geldt $A = 2\pi rh$ en voor de inhoud I geldt $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

- Bereken de totale inhoud van zo'n bolwoning.
- Bereken de totale oppervlakte van zo'n bolwoning.



Figuur 8

Examen

Opgave 8: Drie gelijke volumes

Bekijk het kunstwerk dat bestaat uit een zuil, een kubus en een plaat. Het heet 'Drie gelijke volumes', omdat de drie objecten dezelfde inhoud hebben. De lengte, hoogte en breedte van de kubus zijn 1 meter. De zuil is 4 meter hoog en de lengte en breedte van de zuil zijn aan elkaar gelijk.

- Bereken de lengte en de breedte van de zuil.

Het kunstwerk bestaat uit 3 voorwerpen (plaat, kubus, zuil) met elk een vierkant grondvlak en een inhoud van 1 m³. Het is ook mogelijk om een hele serie van zulke voorwerpen te maken.

Stel, we noemen de plaat voorwerp nummer 1 en we maken van elk volgend voorwerp in de serie de hoogte steeds 25 cm hoger.

Het grondvlak moet steeds vierkant zijn en de inhoud steeds 1 m³. Voor de hoogte van een voorwerp geldt de volgende formule: $h = 25n$. Hierbij is h de hoogte in cm en n het nummer van het voorwerp. De kubus is nu het voorwerp met nummer 4.

Noem de lengte in centimeter van een zijde van het vierkante grondvlak van een voorwerp uit deze serie l . Omdat de inhoud van elk voorwerp uit deze serie gelijk is aan 1 m³, dus gelijk is aan 1000000 cm³, geldt nu het volgende: $l^2 \cdot h = 1000000$.

- Uitgaande van deze formule kun je een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in n . Stel deze formule op.



Figuur 9

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2013, eerste tijdvak)

Opgave 9: Centre Pompidou

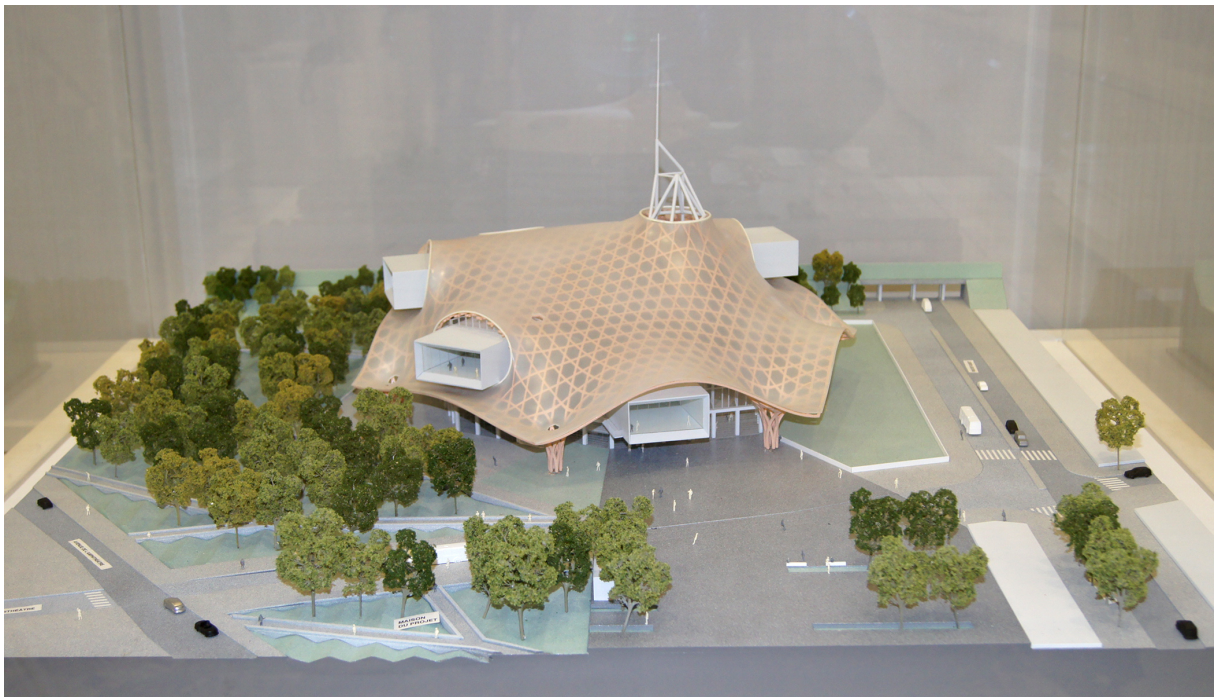
In de Franse plaats Metz staat het tentoonstellingsgebouw Centre Pompidou Metz.



Figuur 10

In dit gebouw zijn drie even grote tentoonstellingsruimtes aangebracht: A, B en C. Deze tentoonstellingsruimtes hebben elk de vorm van een balk en zijn aan de buitenkant 80 meter lang, 16 meter breed en 7 meter hoog.

- a Bekijk de maquette van het gebouw. In deze maquette zijn de tentoonstellingsruimtes 12 centimeter breed. Bereken de inhoud van een tentoonstellingsruimte in de maquette in cm^3 . Ga hierbij uit van de buitenmaten van de tentoonstellingsruimte.



Figuur 11

Twee van de tentoonstellingsruimtes (A en B) steken op verschillende hoogtes door het dak. De derde ruimte (C) is aan de voorzijde onder het dak aangebracht. Of dat aan de achterzijde ook het geval is, is op de foto's niet te zien.

Het bovenaanzicht van het dak is zeshoekig. Neem aan dat dit bovenaanzicht een regelmatige zeshoek is met zijden van 45 meter.

De balk (van tentoonstellingsruimte) C zou in de huidige positie niet helemaal onder zo'n dak passen, maar wellicht wel als de balk C horizontaal wordt gedraaid. Je kunt dit nagaan door te onderzoeken of het bovenaanzicht van de balk past in het bovenaanzicht van het dak.

- b** Onderzoek door op schaal 1 : 1000 te tekenen of het mogelijk is om ruimte C in haar geheel onder het dak te plaatsen.



Figuur 12

Vanuit één van de tentoonstellingsruimtes is deze foto genomen. Daarop is in de verte de kathedraal van Metz te zien. Deze staat evenwijdig aan de gevel van de tentoonstellingsruimte. De lengte van de kathedraal is met een pijl aangegeven. Deze kathedraal is 136 meter lang.

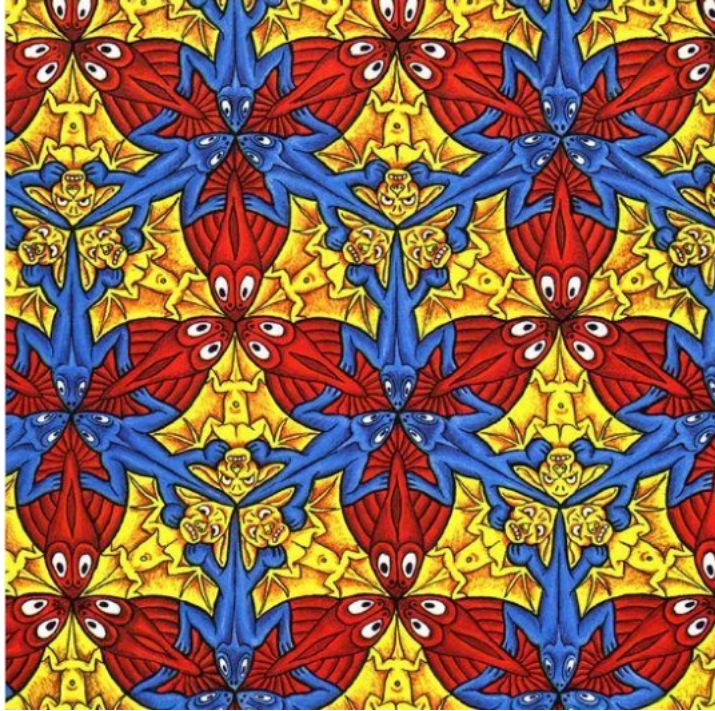
Bij het maken van deze foto stond de fotograaf op 10 meter van het raam, precies recht voor het midden van de getekende pijl. De afstand tussen twee opeenvolgende verticale spijlen van het raam is precies 2 meter.

Door te werken met verhoudingen is het nu mogelijk te berekenen dat de afstand tussen de kathedraal en de fotograaf ongeveer 1 kilometer is.

- c** Geef een dergelijke berekening. Licht je werkwijze toe.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2014, tweede tijdvak)

Werkblad bij Opgave 5 op pagina 3





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
