

1.5 Regelmaat en symmetrie

Inleiding

Dit is een glas-in-lood raam in de St. Gabriëlskerk in Amsterdam, gemaakt door W. Bogtman. Het is een vijfhoek waarvan alle zijden gelijk zijn, een regelmatige vijfhoek genoemd. Daarbinnen zie je een regelmatige vijfpuntige ster, een pentagram. Het geheel is mooi symmetrisch opgebouwd.

In dit onderdeel ga je meer regelmatige veelhoeken zien en eraan rekenen. Ook kom je de verschillende soorten symmetrie weer tegen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip regelmatige veelhoek en rekenen aan regelmatige veelhoeken;
- de verschillende soorten symmetrie benoemen bij vlakke figuren.

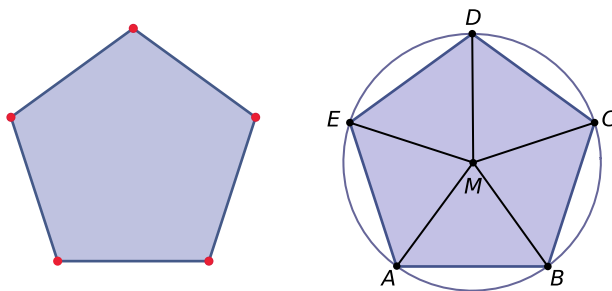
Voorkennis

- de basisvormen rechthoek, driehoek, vierhoek, parallellogram, ruit, vlieger, cirkel, balk, prisma, cilinder, bol, piramide en kegel;
- de begrippen lijnsymmetrisch en draaisymmetrisch;
- lengte (bijvoorbeeld omtrek) en oppervlakte van een rechthoek, driehoek, cirkel en balk berekenen;
- werken met verhoudingen en gelijkvormigheid en met vergrotingsfactoren voor lengte, oppervlakte en inhoud.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een regelmatige vijfhoek, een pentagon. Alle zijden zijn even lang en alle hoeken even groot. Daarom passen zijn hoekpunten precies op een cirkel.



Figuur 2

- Wat betekent dit alles voor de vijf driehoeken waarin je het pentagon kun verdelen?
- Hoe groot is elk van de vijf hoeken rond het punt M ?
Neem aan, dat de straal van de cirkel door de vijf hoekpunten 10 cm is.
- Kun je uitleggen waarom dit betekent dat de zijden van de vijfhoek dan (ongeveer) 11,76 cm lang moeten zijn?
Zo'n regelmatige vijfhoek is nogal symmetrisch.
- Ten opzichte van welke lijnen is hij lijnsymmetrisch?

- e Ten opzichte van welk punt is hij draaisymmetrisch? En hoe groot is de kleinste hoek waarover je hem kunt draaien?
- f Hoe teken je zelf een pentagon met zijden van 5 cm?

Uitleg

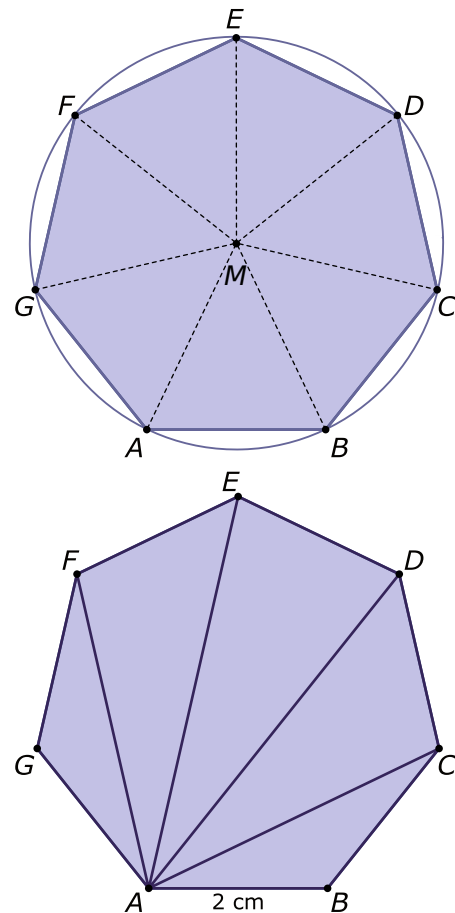
Een regelmatige zevenhoek is een voorbeeld van een regelmatige veelhoek. De hoekpunten van elke regelmatige veelhoek liggen op een cirkel, de omgeschreven cirkel. Je ziet hier, hoe een regelmatige zevenhoek op twee manieren kan worden verdeeld.

- De verdeling in zeven gelijkbenige driehoeken geeft je de mogelijkheid om de oppervlakte van de figuur te berekenen als je de zijden van die driehoeken weet. Hier zijn de zijden van de zevenhoek 2 cm en is de straal van de omgeschreven cirkel 2,30 cm (ongeveer). De oppervlakte kun je daarmee zelf berekenen.
- De verdeling in 5 driehoeken laat zien, dat de som van de hoeken van een zevenhoek $5 \cdot 180^\circ$ is. Daarmee kun je gemakkelijk berekenen hoe groot elk van de hoeken van de regelmatige zevenhoek is.

Regelmatige veelhoeken zijn heel erg symmetrisch.

De regelmatige zevenhoek bijvoorbeeld is:

- lijnsymmetrisch ten opzichte van alle lijnen door een hoekpunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel;
- draaisymmetrisch met centrum het midden van de omgeschreven cirkel en kleinste draaihoek de hoek tussen twee opeenvolgende stralen.



Figuur 3

Opgave 1

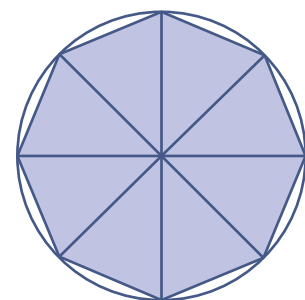
Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

- a Bereken de grootte van de hoeken van een regelmatige zevenhoek.
- b Teken een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.
- c Bereken de oppervlakte van de gegeven regelmatige zevenhoek.
- d Bereken de kleinste draaihoek waarover je deze zevenhoek kunt draaien zonder dat je een andere figuur ziet.

Opgave 2

Dit is een regelmatige achthoek (een octagon). Neem aan, dat de zijden 4 cm zijn en de straal van de cirkel (ongeveer) 5,23 cm is.

- a Bereken de grootte van de hoeken van een regelmatige achthoek.
- b Teken deze regelmatige achthoek.
- c Bereken de oppervlakte van de gegeven regelmatige achthoek.
- d Hoeveel symmetrieassen heeft de regelmatige achthoek?
- e Lijnstukken die twee punten van een achthoek met elkaar verbinden, maar geen zijden van de achthoek zijn, heten diagonalen. Hoeveel diagonalen heeft de regelmatige achthoek?



Figuur 4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

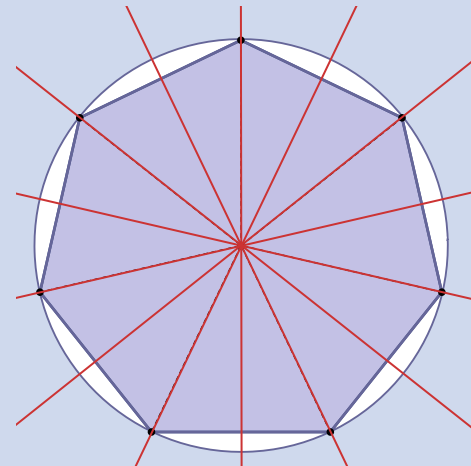
Een **regelmatige veelhoek** is een veelhoek waarvan alle zijden en alle hoeken gelijk zijn. Een regelmatige n -hoek heeft:

- n hoekpunten die op een omgeschreven cirkel liggen;
- n gelijke zijden;
- n gelijke hoeken die samen $(n - 2) \cdot 180^\circ$ zijn;
- $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ diagonalen.

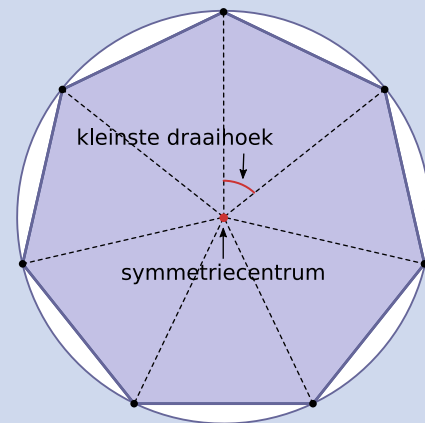
Regelmatige veelhoeken zijn **symmetrisch**.

Een regelmatige n -hoek is:

- **lijnsymmetrisch** met n symmetrieassen;
- **draaisymmetrisch** met als symmetriecentrum het middelpunt van de omgeschreven cirkel en als kleinste draaihoek $\frac{360^\circ}{n}$;



lijnsymmetrie



draaisymmetrie

Figuur 5

Voorbeeld 1

Teken een regelmatige zeshoek (hexagon) met zijden van 5 cm.

Antwoord

Een regelmatige zeshoek heeft zes hoekpunten op een cirkel met middelpunt M . Die zes hoekpunten liggen op stralen van die cirkel waar steeds $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ tussen zit. De driehoeken die zo gevormd worden zijn gelijkzijdig. Dus de omgeschreven cirkel van de zeshoek heeft ook 5 cm als straal.

Nu is de zeshoek gemakkelijk te tekenen.

Opgave 3

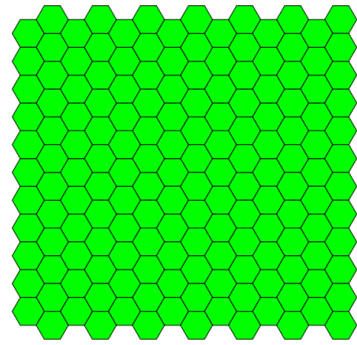
Bekijk **Voorbeeld 1**. Het gaat om zeshoek $ABCDEF$.

- Leg uit waarom de zes driehoeken waarvan $\triangle MAB$ er één is, gelijkzijdig zijn.
- Teken zelf de regelmatige zeshoek.
- Bereken de oppervlakte van de gegeven regelmatige zeshoek.
- Hoeveel diagonalen heeft de gegeven regelmatige zeshoek?

Opgave 4

Je ziet hier hoe je van een regelmatige zeshoek een vlakvullend patroon kunt leggen.

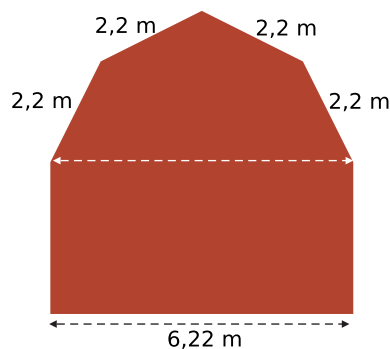
- a Waarom kan dat bij een regelmatige zeshoek?
- b Kun je van alle regelmatige veelhoeken zo'n gesloten vlakvulling maken? Licht je antwoord toe.



Figuur 6 bron: Wikipedia

Voorbeeld 2

Deze schuur heeft een mansardedak. De afmetingen staan in het vooraanzicht.



Figuur 7

Welke halve regelmatige veelhoek herken je hier? En hoe groot moeten de hoeken in het vooraanzicht dus zijn?

Antwoord

De dakrand die je in het vooraanzicht ziet is een halve regelmatige achthoek.

De hoeken van die regelmatige achthoek zijn $\frac{6 \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$.

De drie bovenste hoeken van het vooraanzicht zijn daarom elk 135° .

De twee hoeken tussen muur en dakrand zijn elk $157,5^\circ$.

De twee hoeken tussen muur en begane grond zijn elk 90° .

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Waarom zijn de twee hoeken tussen muur en dakrand $157,5^\circ$?
- b Bereken de oppervlakte van de voorgevel in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 6

Een regelmatige twintighoek (of icosagon) vult zijn omgeschreven cirkel bijna helemaal op.

- Hoe teken je in een cirkel met een straal van 4 cm zo'n regelmatige twintighoek?
- Hoeveel symmetrieassen heeft deze regelmatige twintighoek?
- Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige twintighoek?

Opgave 7

Een regelmatige twintighoek heeft een omgeschreven cirkel met een straal van 4 cm. De zijden ervan zijn daarom ongeveer 1,25 cm lang.

- Hoe groot is de oppervlakte van deze regelmatige twintighoek in cm^2 op één decimaal nauwkeurig?
- Hoeveel procent van de oppervlakte van de omgeschreven cirkel is dat?

Opgave 8

Dit tafeltje heeft een tafelblad in de vorm van een regelmatige zes-hoek. Het onderstel bestaat uit één in vieren gevouwen plaat met een hoogte van 60 cm en vier breedtes van 40 cm.

- Hoe groot is de exacte oppervlakte van het tafelblad?
- Hoeveel oppervlakte aan materiaal is er in totaal nodig?



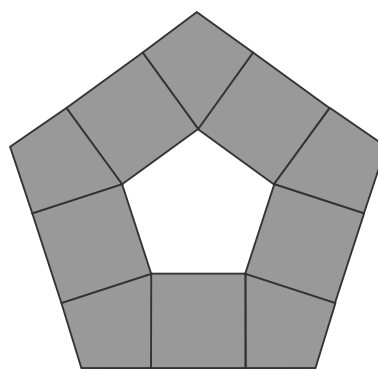
Figuur 8

Opgave 9

Dit is het Pentagon, het gebouw van het Amerikaanse ministerie van defensie in Washington.



bron: Wikipedia



bovenaanzicht

Figuur 9

Hier zie je enkele gegevens, afkomstig uit de Wikipedia:

- Totale oppervlakte: $2,4 \text{ km}^2$
- Oppervlakte van het gebouw: 117.000 m^2
- Parkeerplaatsen: 8.770
- Bruto vloeroppervlak: 620.000 m^2
- Inhoud: $2.000.000 \text{ m}^3$
- Lengte van de buitengevel: 280 m
- Hoogte: 24 m

- Aantal verdiepingen: 7 (5 bovengronds, onbekend hoeveel ondergronds)
- Totale lengte van de gangen: 28 km

a Verklaar de naam van het gebouw.

b Het bovenaanzicht van het gebouw bestaat uit vijf vierkanten en vijf vliegers. Bereken de hoeken van zo'n vlieger.

Elke gevel is 280 m lang. Hiermee kun je berekenen dat elk vierkant ongeveer 114 bij 114 m is.

c Ga met behulp van deze gegevens na of het gebouw inderdaad 117.000 m² aan oppervlakte heeft.

d Bereken de totale oppervlakte van de buitenste vijfhoek.

e Bereken de oppervlakte van het binnengebied van de binnenste vijfhoek op twee manieren:

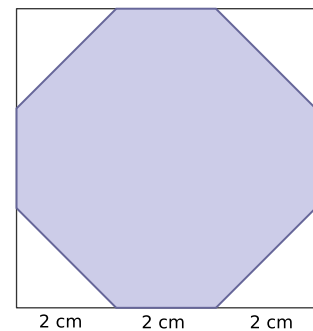
1. door de oppervlakte van het gebouw af te trekken van die van de buitenste vijfhoek,
2. door de vergrotingsfactor van de buitenste vijfhoek naar de binnenste vijfhoek te gebruiken.

Krijg je in beide gevallen hetzelfde antwoord?

Opgave 10

Je ziet hier hoe Sven een regelmatige achthoek denkt te tekenen met behulp van een vierkant van 6 bij 6 cm.

- a** Laat met een berekening zien dat dit geen regelmatige achthoek oplevert.
- b** Maartje berekent hoe je binnen een vierkant wel een regelmatige achthoek kunt maken met de hoekpunten op de zijden van het vierkant. Hoe lang worden de zijden van die achthoek?



Figuur 10

Toepassen

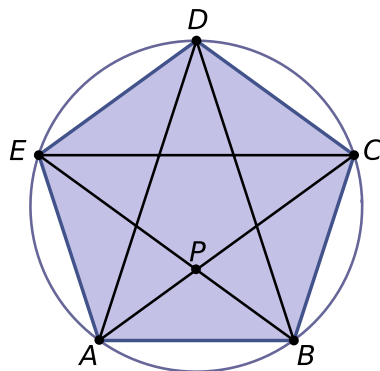
Opgave 11: Pentagram

Dit is een glas-in-lood raam in de St. Gabriëlskerk in Amsterdam, gemaakt door W. Bogtman. Het is een regelmatige vijfhoek (pentagon). Daarbinnen zie je een regelmatige vijfpuntige ster, een pentagram. Het geheel is mooi symmetrisch opgebouwd.

- a** Teken zelf een pentagram in een cirkel met een straal van 5. De vijf hoekpunten van het bijbehorende pentagon komen op de cirkel te liggen.
- b** Bekijk de figuur. Hoe groot zijn de drie hoeken bij hoekpunt A?



Figuur 11



Figuur 12

- c** Laat zien, dat dit betekent dat de driehoeken ABP en CAB gelijkvormig zijn.

Neem nu aan dat de zijden van het pentagon x eenheden lang zijn en neem $PA = 1$.

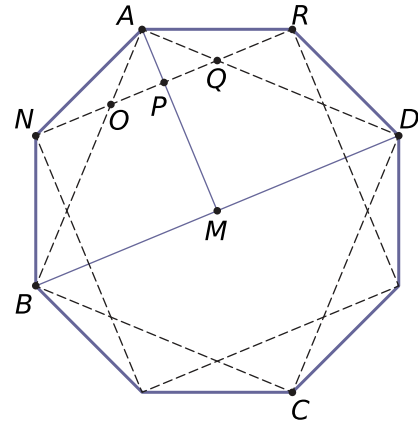
- d Laat zien, dat dan $CP = x$ eenheden en $AC = x + 1$ eenheden.
- e Laat zien, dat uit de gelijkvormigheid van $\triangle ABP$ en $\triangle CEP$ volgt dat $x^2 = x + 1$.
- f Bereken hieruit de exacte waarde van x .
- g Leg uit dat de volgende bewering klopt: "Twee lijnstukken van een pentagram die elkaar snijden verdelen elkaar in een verhouding die overeen komt met de gulden snede."

Opgave 12: Regelmatige achthoek

Bekijk de regelmatige achthoek die is ontstaan door twee vierkanten gekruist op elkaar te leggen. De beide vierkanten hebben ieder een zijde van 8 centimeter. Je wilt de lengte van elke zijde van de achthoek berekenen.

- a Hoe lang zijn alle diagonalen van de achthoek?
- b AM staat loodrecht op diagonaal BD . Bereken de lengte van AP .
- c Bereken de lengte van de zijden van de regelmatige achthoek.
- d Je kunt nu berekenen of de twee vierkanten elkaars zijden in drie even lange stukken opdelen.

Anders geformuleerd: is NO even lang als OQ en even lang als QR ?



Figuur 13

Testen

Opgave 13

Stel je een regelmatige twaalfhoek (of dodecagon) voor.

- a Hoe teken je in een cirkel met een straal van 4 cm zo'n regelmatige twaalfhoek?
- b Hoeveel symmetrieassen heeft deze regelmatige twaalfhoek?
- c Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige twaalfhoek?

Opgave 14

Een regelmatige twaalfhoek heeft een omgeschreven cirkel met een straal van 4 cm. De zijden ervan zijn daarom ongeveer 2,07 cm lang.

- a Hoe groot is de oppervlakte van deze regelmatige twaalfhoek in cm^2 op één decimaal nauwkeurig?
- b Hoeveel procent van de oppervlakte van de omgeschreven cirkel is dat?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
