

## 1.4 Vergroten en verkleinen

### Inleiding

In de kunst en architectuur wordt vaak met schaalmodellen gewerkt. Je kunt namelijk in veel gevallen niet even het gebouw zelf bouwen om te testen of je het wel mooi genoeg vindt, of stevig genoeg. En hetzelfde geldt voor grote beeldhouwwerken, grote brugconstructies, en dergelijke. En als je met een schaalmodel werkt, moet er worden omgerekend van het schaalmodel naar de werkelijkheid en omgekeerd. Werken met vergrotingsfactoren dus...



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- werken met lengte- en oppervlakte- en inhoudsvergrotingsfactoren en deze gebruiken bij berekeningen.

### Voorkennis

- de basisvormen rechthoek, driehoek, vierhoek, parallellogram, ruit, vlieger, cirkel, balk, prisma, cilinder, bol, piramide en kegel;
- lengte (bijvoorbeeld omtrek) en oppervlakte van een rechthoek, driehoek, cirkel en balk berekenen;
- werken met verhoudingen en gelijkvormigheid.

### Verkennen

#### Opgave V1

Een glazen bol heeft een oppervlakte van  $2827 \text{ cm}^2$ .

Een tweede glazen bol heeft een 2 keer zo groot volume.

Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de kleine bol dan die van de grote bol?

### Uitleg 1

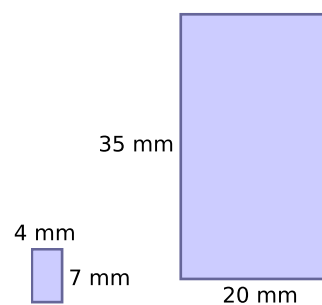
Bekijk de kleine rechthoek met daarnaast een grotere rechthoek waarvan de zijden vijf keer zo groot zijn.

- De omtrek van de kleine rechthoek is  $7 + 4 + 7 + 4 = 22 \text{ mm}$ .
- De omtrek van de grote rechthoek is  $35 + 20 + 35 + 20 = 110 \text{ mm}$ .

De omtrek van de grotere rechthoek is vijf keer zo groot als die van de kleine rechthoek.

Geldt dit ook voor de oppervlakte van de rechthoeken?

- De oppervlakte van de kleine rechthoek is  $7 \cdot 4 = 28 \text{ mm}^2$ .
- De oppervlakte van de grote rechthoek is  $35 \cdot 20 = 700 \text{ mm}^2$ .



Figuur 2

Door de vergroting is de oppervlakte  $\frac{700}{28} = 25 = 5^2$  keer zo groot geworden.

En dat is ook logisch, zowel de lengte als de breedte wordt vijf keer zo groot en voor de oppervlakte moet je ze vermenigvuldigen.

De vergrotingsfactor van de lengtes noem je de lengtevergrotingsfactor.

De bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor is het kwadraat van de lengtevergrotingsfactor.

Wanneer van een ruimtelijke figuur alle lengtes met eenzelfde factor  $k$  worden vermenigvuldigd, dan geldt:

- de lengtevergrotingsfactor is  $k$ ;
- de oppervlaktevergrotingsfactor is  $k^2$ .

### Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

- Stel dat de zijden van de kleine rechthoek met vergrotingsfactor 3 worden vermenigvuldigd. Bereken hoeveel keer zo groot de oppervlakte wordt.
- Bereken de oppervlaktevergrotingsfactor als de lengtevergrotingsfactor 0,6 bedraagt. De kleine rechthoek wordt vergroot tot zijn oppervlakte 16 keer zo groot is geworden.
- Bereken de lengtevergrotingsfactor  $k$ .

### Opgave 2

Een kubus heeft ribben van 4 centimeter.

- Bereken de oppervlakte van deze kubus.
- Laat zien dat een kubus waarvan de ribben drie keer zo groot zijn ook inderdaad een negen keer zo grote oppervlakte heeft.
- Laat zien dat een kubus waarvan de ribben  $k$  keer zo groot zijn ook inderdaad een  $k^2$  keer zo grote oppervlakte heeft.

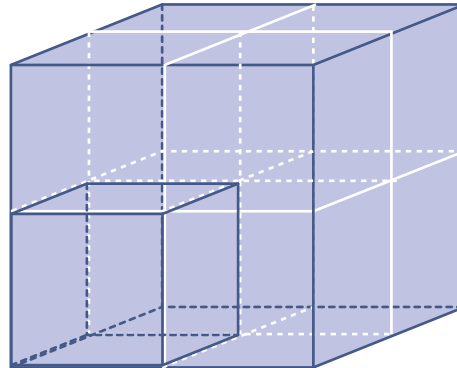
### Uitleg 2

De afbeelding laat zien wat er gebeurt als je van een kubus alle ribben twee keer zo lang maakt:

- alle lengtes worden 2 keer zo groot.
- alle oppervlaktes worden  $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$  keer zo groot.
- de inhoud wordt  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$  keer zo groot.

Als alle lengtes  $k$  keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes  $k^2$  keer zo groot en de inhoud  $k^3$  keer zo groot.

De inhoudsvergrotingsfactor is dus  $k^3$ .



Figuur 3

### Opgave 3

Gegeven is een kleine kubus met ribben van 3 centimeter en een grote kubus met ribben van 6 centimeter.

- Bereken de lengtevergrotingsfactor.
- Bereken voor beide kubussen de oppervlakte van het grondvlak. Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grote kubus in vergelijking met de kleine kubus?
- Bereken de oppervlaktevergrotingsfactor.
- Bereken van beide kubussen de inhoud. Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de grote kubus in vergelijking met de kleine kubus?
- Bereken de inhoudsvergrotingsfactor.

## Opgave 4

Van een ruimtelijke figuur zijn alle afmetingen bekend. Je maakt precies net zo'n ruimtelijke figuur, maar met alle afmetingen drie keer zo groot.

- Bereken hoeveel keer zo groot de oppervlakte wordt.
- Bereken hoeveel keer zo groot de inhoud wordt.

Je maakt een derde figuur, precies zoals de eerste, maar nu wordt de inhoud 10 keer zo groot.

- Hoeveel keer zo groot worden alle afmetingen?
- Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van deze derde figuur?

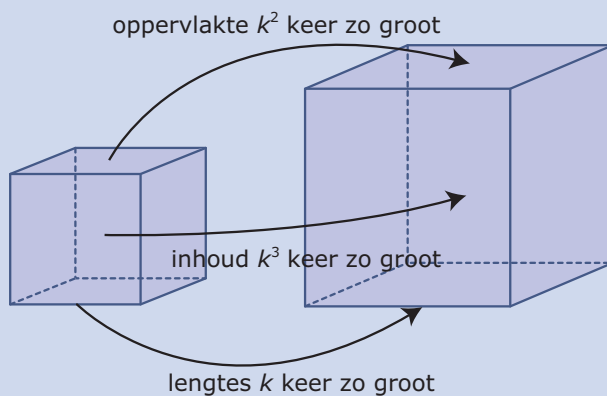
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Wanneer van een ruimtelijke figuur alle lengtes met eenzelfde factor  $k$  worden vermenigvuldigd, dan geldt:

- de **lengtevergrotingsfactor** is  $k$ ;
- de **oppervlaktevergrotingsfactor** is  $k^2$ ;
- de **inhoudsvergrotingsfactor** is  $k^3$ .

Bij twee gelijkvormige figuren kan de éne figuur uit de andere ontstaan door zo'n vermenigvuldiging met een vaste vergrotingsfactor (of verkleiningsfactor).



Figuur 4

### Voorbeeld 1

Het knikkerspel bestaat al heel lang. Een knikker is bolvormig. De grootste veelgebruikte knikkers hebben een diameter van 50 millimeter. Zo'n grote knikker heeft een straal  $r = 25$  millimeter. Hij heeft daarom een oppervlakte van  $7854 \text{ mm}^2$ .

De kleinste is een schaalmodel van de grootste veelgebruikte knikker met schaalverhouding  $1 : 3,125$ .

Bereken de vergrotingsfactor en gebruik deze om oppervlakte en inhoud van de kleinste knikkers te berekenen, afgerond op gehele.

De oppervlakte van een bol met straal  $r$  is  $4 \cdot \pi \cdot r^2$ .

De inhoud van een bol met straal  $r$  is  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ .

Antwoord

De vergrotingsfactor is  $\frac{1}{3,125}$ .

De oppervlakte van de kleine knikker is  $\left(\frac{1}{3,125}\right)^2 \cdot 7854 \approx 804 \text{ mm}^2$ .

De inhoud van de grote knikker is  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 65450 \text{ mm}^3$ .

De inhoud van de kleine knikker is  $\left(\frac{1}{3,125}\right)^3 \cdot 65450 \approx 2145 \text{ mm}^3$ .

### Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**. De straal van de kleine knikker is 8 millimeter.

- Leg uit hoe je dit kunt berekenen.
- Bereken met de formule van de oppervlakte van een bol de oppervlakte van de kleine knikker in gehele vierkante millimeters en vergelijk de uitkomst met het antwoord van het voorbeeld.
- Bereken met de formule van de oppervlakte van een bol de inhoud van de kleine knikker in gehele kubieke millimeters en vergelijk de uitkomst met het antwoord van het voorbeeld.

### Opgave 6

Een beroemd Brits vliegtuig dat een belangrijke rol speelde tijdens Tweede Wereldoorlog is de Supermarine Spitfire. De lengte van het toestel is 9,12 meter en de hoogte is 3,86 meter. De oppervlakte van de vleugels is  $22,48 \text{ m}^2$ .

Een modelbouwer maakt een verkleining op schaal 1 : 72 van dit vliegtuig.

- Bereken de lengte en hoogte (mm) van het model van dit vliegtuig.
- Bereken de vleugeloppervlakte van het model in  $\text{mm}^2$ .

### Voorbeeld 2

Gegeven zijn twee gelijkvormige maatbekers I en II in de vorm van een cilinder. Maatbeker I heeft een inhoud van  $300 \text{ mm}^3$  en maatbeker II heeft een inhoud van  $500 \text{ mm}^3$ . Bereken hoe zich de hoogtes en de diameters van beide maatbekers verhouden.

Antwoord

Maatbeker II heeft een inhoud die  $\frac{500}{300} = \frac{5}{3}$  keer zo groot is als die van maatbeker I. De inhoudsvergrotingsfactor is  $\frac{5}{3}$ .

Als  $k$  de lengtevergrotingsfactor is, dan moet gelden dat  $k^3 = \frac{5}{3}$ . Dit betekent dat  $k = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \approx 1,186$ .

De diameter en de hoogte van maatbeker II zijn dus ongeveer 1,186 keer zo groot als die van maatbeker I.

### Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**. De straal van maatbeker I is 3 centimeter.

- Bereken de hoogte van maatbeker I. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- Bereken de straal en de hoogte van maatbeker II. Rond je antwoorden af op drie decimalen.
- Bereken nu met je antwoorden van b de inhoud van maatbeker II. Klopt dit met de inhoud die is gegeven in het voorbeeld?

### Opgave 8

Bekijk de wijnflessen. De bouteille is een normale wijnfles van 0,75 liter. Neem aan dat al deze flessen gelijkvormig zijn.



Figuur 5

- Bereken hoeveel keer zo hoog een Magnum in vergelijking met een Fillette is. Rond het antwoord af op één decimaal.
- Voor een Magnum wordt even dik glas gebruikt als voor een Bouteille. Bereken hoeveel keer zo veel glas er voor nodig is. Rond het antwoord af op één decimaal.
- Een Bouteille heeft een hoogte van 36 cm. Bereken hoe hoog een Melchior is. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

## Verwerken

### Opgave 9

Een kunstenaar maakt van een groot bronzen beeld eerst een model op schaal 1 : 20. Het schaalmodel heeft een oppervlakte van  $1400 \text{ cm}^2$  en een inhoud van  $3000 \text{ cm}^3$ .

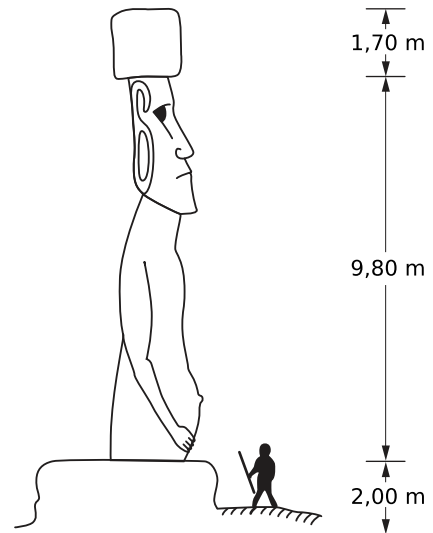
Bereken de oppervlakte en de inhoud van het bronzen beeld.

**Opgave 10**

Paaseiland staat bekend om zijn reusachtige beelden, de Moai genaamd.

Bekijk de tekening van het beeld Paro dat (zonder de hoed) 9,8 meter lang is en (zonder hoed) maar liefst 70 ton weegt. Volgens wetenschappers heeft het ongeveer een jaar gekost om met 30 man dit beeld uit de rots te kerven, daarna nog twee maanden om het beeld met 90 man uit de groeve te halen, en daarna nog vijf maanden om het met 90 man op zijn platform te zetten.

- a** Naast het beeld zie je een mens staan. Ga ervan uit dat dit een volwassen man is van 1,80 meter.  
Bepaal de vergrotingsfactor  $k$  tussen de man en het beeld. Rond je antwoord af op één decimaal.
- b** Stel dat je van hetzelfde materiaal als dit beeld een beeld zou maken dat net zo lang is als de man.  
Bereken hoe zwaar het beeld(je) wordt. Geef je antwoord in gehele kilogrammen.



**Figuur 6**

**Opgave 11**

Bekijk het rijtje Russische babushka's. Dat zijn houten poppetjes die je open kunt maken om er een kleiner poppetje in te stoppen. Zo passen ze uiteindelijk allemaal in elkaar.



**Figuur 7**

Noem het linker poppetje a, die daarnaast b, enzovoort.

Poppetje b is 5,6 centimeter hoog. Poppetje c heeft een inhoud van  $24,1 \text{ cm}^3$  en poppetje d heeft een inhoud van  $66,1 \text{ cm}^3$ . De vergrotingsfactor is tussen alle opeenvolgende poppetjes even groot.

Bereken de inhoud en de hoogte van poppetje a. Rond je antwoorden af op één decimaal.

**Opgave 12**

Een bedrijf maakt kunststof bloempotten.

Wanneer je de bloempot op zijn kop zet, zie je goed dat deze de vorm heeft van een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. Deze piramide heeft, als hij niet is afgeknot, een hoogte van 150 centimeter.

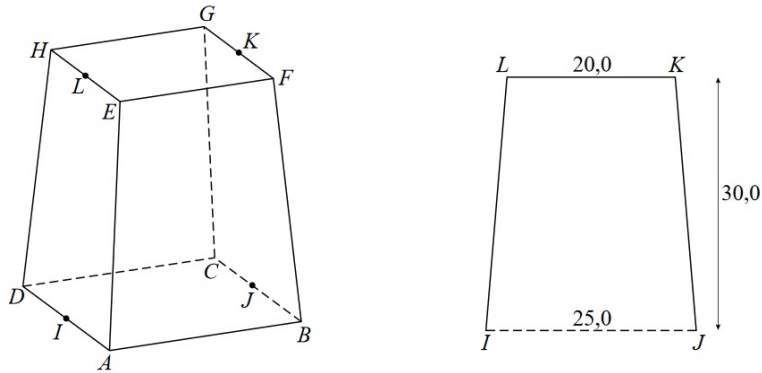
In de linker afbeelding is de ruimtelijke figuur getekend die overeenkomt met de buitenkant van de bloempot.  $ABCD$  en  $EFGH$  zijn vierkanten, waarbij  $AB = 25$  centimeter en  $EF = 20$  centimeter.

De hoogte van de bloempot is 30 centimeter.



**Figuur 8**

In de rechter afbeelding is de verticale doorsnede  $IJKL$  getekend.



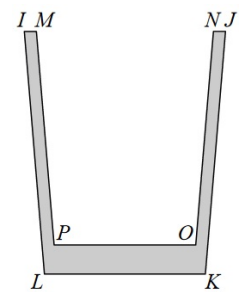
**Figuur 9**

- a** De inhoud van de ruimtelijke figuur in afbeelding a is ongeveer 15 liter. Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur in afbeelding a. Rond je antwoord in liter af op één decimaal.

Bekijk de figuur van een verticale doorsnede van de bloempot. De dikte van de wanden en de bodem is nu zichtbaar.

Verder is gegeven dat:

- de binnenwanden evenwijdig zijn aan de buitenwanden
- de binnenkant MPON van de bloempot een exacte verkleining is van de buitenkant  $ILKJ$
- $IJ = 25$  centimeter
- $MN = 22$  centimeter
- $PO = 17$  centimeter
- $LK = 20$  centimeter



**Figuur 10**

Iemand wil de bloempot vullen met potgrond. Voordat hij de potgrond koopt, wil hij onderzoeken of een zak met 10 liter potgrond genoeg is om de bloempot helemaal te vullen. Om dit te onderzoeken, moet de inhoud van de bloempot worden berekend. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van het feit dat de binnenkant van de bloempot een exacte verkleining is van de buitenkant.

- b** Onderzoek of je met 10 liter potgrond de bloempot helemaal kunt vullen.

(naar: examen havo wiskunde B in 2010, eerste tijdvak)

### Opgave 13

Een regelmatige vierzijdige piramide van hout wordt evenwijdig aan het grondvlak doorgezaagd. De oorspronkelijke hoogte van de piramide was 12 centimeter, het afgezaagde topje (ook een piramide) heeft een hoogte van 8 centimeter. Je hebt nu twee nieuwe ruimtelijke objecten: het afgezaagde topje en de onderkant (een afgeknotte piramide).

Bereken hoe zich de gewichten van de twee delen verhouden.

### Opgave 14

Van een cocktailglas heeft de bovenkant een wijde kegelvorm. Dat heeft een goede reden.

Stel dat de vloeistofspiegel van de cocktail tot halverwege de hoogte van de kegel staat, hoeveel procent van de totale inhoud van het cocktailglas is dan gevuld?

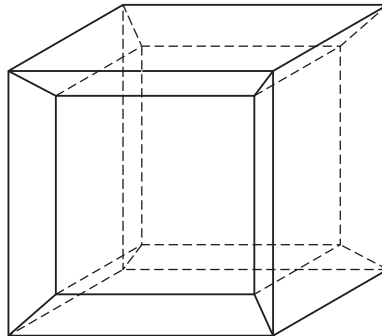


**Figuur 11**

## Toepassen

### Opgave 15: La Grande Arche

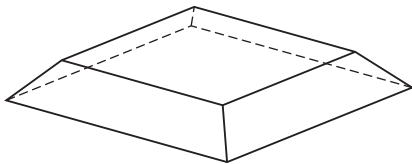
In Parijs staat een groot gebouw, La Grande Arche, dat vrijwel de vorm van een uitgeholde kubus heeft.



Figuur 12

Bij benadering geldt dat de buitenste acht hoekpunten van het gebouw een grote kubus vormen met ribben van 110 meter. De binnenste acht hoekpunten vormen een kleinere kubus met ribben van 88 meter. Beide kubussen hebben hetzelfde middelpunt en overeenkomstige zijvlakken zijn evenwijdig.

- a Bereken de verhouding van de oppervlaktes van de grote en de kleine kubus.



Figuur 13

Om de inhoud van het gebouw te bepalen kan het volgende model worden gebruikt. Als aan alle zijden van de kleine kubus hetzelfde lichaam dat staat afgebeeld wordt toegevoegd, ontstaat precies de grote kubus. La Grande Arche bevat vier van deze zes lichamen.

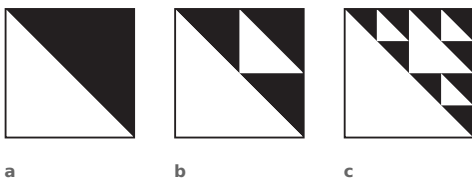
- b Bereken de inhoud van het gebouw in kubieke meters nauwkeurig.

(naar: pilotexamen wiskunde C in 2012, tweede tijdvak)

### Opgave 16: Fractals

Fractals komen overal in de natuur voor, in planten en in sterrenstelsels. Overal kom je kleinere structuren tegen die op grotere structuren lijken. Zo bestaat een denneboom uit een stam met takken, die takken hebben weer zijtakken, die zijtakken hebben weer dunnere takjes met naalden.

In de drie figuren is uitgelegd hoe een fractal ontstaat. In figuur a is een zwart vierkant weergegeven dat voor de helft wit is gemaakt. In figuur b is weer de helft van een zwart vierkant wit gemaakt. In figuur c wordt dit proces doorgezet. Je zoomt als het ware steeds verder in.



Figuur 14

- a Hoeveel zwarte driehoeken zijn er in figuur d?
- b De oppervlakte van het gehele vierkant is 1. Bereken de zwarte oppervlakte van figuur c.
- c Zoek uit welke oppervlaktevergrotingsfactor geldt voor de zwarte oppervlakte.
- d Bereken de zwarte oppervlakte van figuur f. Rond je antwoord af op vier decimalen.

- e In theorie zou je dit patroon oneindig lang door kunnen zetten. Op een gegeven moment kun je dan alleen met een microscoop de driehoekjes bekijken. Naar welk getal nadert de zwarte oppervlakte dan?

## Testen

### Opgave 17

Je kunt een bepaalde soort verf kopen in blikken van 1 liter en in blikken van 5 liter. Deze blikken zijn gelijkvormig.

- a Hoeveel keer zo hoog is het 5 liter blik dan het 1 liter blik?
- b Als beide blikken worden gemaakt uit een even dikke metaalplaat, hoeveel keer zoveel metaal is er dan voor het 5 liter blik nodig? En hoe zit dat als het metaal ook in dezelfde verhouding dikker wordt?

### Opgave 18

Een ringslang met een lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van  $483 \text{ cm}^2$ . Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt 51,84 kg. Beide soorten slangen hebben dezelfde verhoudingen.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa constrictor?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---