1.2 Inhoud

Inleiding

Bij het ontwerpen van gebouwen, meubels, gebruiksvoorwerpen, beeldhouwwerk, en dergelijke, spelen afmetingen een grote rol. Je wilt weten hoe hoog een gebouw moet worden, hoe zwaar een gebruiksvoorwerp wordt, hoeveel er in een beker, een vaas past, hoeveel materiaal er voor nodig is. Er moet daarom vaak flink worden gerekend, niet alleen aan afmetingen en oppervlakte, maar ook aan inhoud en gewicht.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- inhoud van ruimtelijke figuren berekenen;
- inhoud van samengestelde en/of afgeknotte figuren berekenen.

Voorkennis

- lengtematen (bijvoorbeeld omtrek) en oppervlakte van prisma, cilinder, bol, piramide en kegel berekenen;
- lengtematen uit oppervlakte of omtrek berekenen;
- lengtematen en oppervlakte van figuren die zijn samengesteld uit basisvormen berekenen.
- rekenen met de stelling van Pythagoras;
- de inhoud van ruimtelijke figuren zoals een kubus, balk, cilinder en piramide met vierkant grondvlak kunnen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

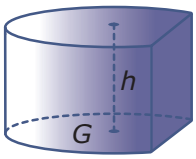
Neem een standaard plastic koffiebekertje. Het heeft de vorm van een afgeknotte kegel (als je niet op details let).

a Probeer met een berekening te laten zien dat er 0,2 L koffie in kan.

b Bereken hoeveel cm^2 de oppervlakte van het bekertje is.

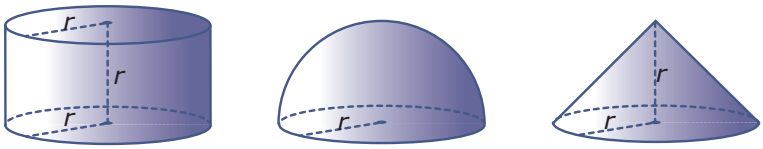
Uitleg

Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$. Volgens het principe van Cavalieri geldt dit zelfs als het een scheef prisma of een scheve cilinder betreft, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) wordt gemeten.



Figuur 2

De inhoud (het volume) V van een rechte cilinder is daarom $V_{\text{cilinder}} = \pi r^2 h$.



Figuur 3

De beroemde Griekse wiskundige **Archimedes** (287—212 v.Chr.) hield zich veel bezig met het berekenen van de inhoud van lichamen. Hij ontdekte dat de inhouden van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als 3 : 2 : 1.
De inhoud van deze cilinder is: $\pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$.

De inhoud van de halve bol is daar $\frac{2}{3}$ deel van en de inhoud van de kegel is daar $\frac{1}{3}$ deel van.

Hiermee vind je voor de inhoud van een hele bol: $V_{\text{bol}} = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Archimedes liet ook zien, dat de inhoud van een piramide $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ is.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** verschillende inhoudsformules voor de cilinder, bol en kegel.

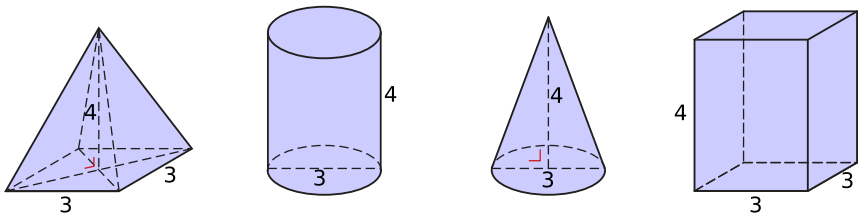
a Bereken exact de inhoud van een cilinder met een straal van 10 cm en een hoogte van 20 cm.

b In de cilinder bij a past precies een bol. Bereken exact de inhoud van die bol.

c In de cilinder bij a past precies een kegel. Bereken exact de inhoud van die kegel.

Opgave 2

Bekijk de afbeelding.



Figuur 4

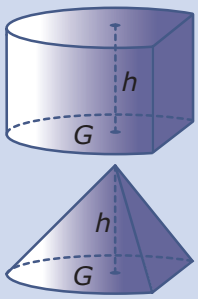
Staan de vier ruimtelijke figuren op volgorde van grootste inhoud naar kleinste inhoud?

Toon je antwoord aan door alle volumes te berekenen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je weet dat de **inhoud (het volume)** van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$.
De **inhoud van een balk** is daarom
$V_{\text{balk}} = G \cdot h = l \cdot b \cdot h$.
De **inhoud van een rechte cilinder** is daarom
$V_{\text{cilinder}} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.



Figuur 5

Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een piramide of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte, gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

De **inhoud van een rechte piramide** is daarom

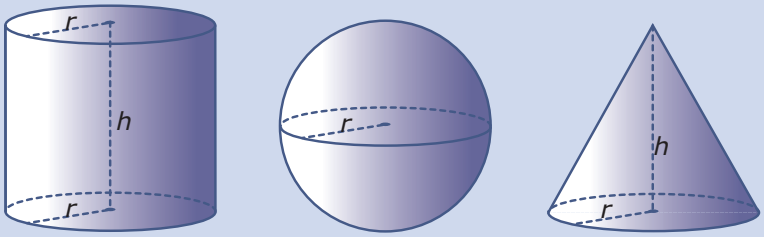
$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

En de **inhoud van een rechte kegel** is daarom

$V_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$.

Dit alles geldt ook voor scheve prisma's, piramides, cilinders of kegels, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) staat.

De **inhoud van een bol** is: $V_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Figuur 6

Voorbeeld 1

Bekijk de foto van het West Bay Lagoon Plaza in Doha, ook bekend als de zigzagtorens. Beide torens zijn 138,6 meter hoog. De begane grond is 25,6 meter bij 72,8 meter.

Beide gebouwen hebben 34 verdiepingen verdeeld over vier 'scheve' even grote blokken. Het onderste en bovenste blok hebben beide acht verdiepingen, de twee middelste blokken hebben beide negen verdiepingen. Alle verdiepingsvloeren en het dak lopen evenwijdig aan de begane grond.

Bereken de inhoud van één toren in m^3, rond je antwoord af op gehelen.

Figuur 7

Antwoord

Het grondvlak en bovenvlak lopen evenwijdig aan elkaar en hebben dezelfde vorm als elke andere doorsnede evenwijdig aan die vlakken. Daarom kun je de inhoud V van het gebouw berekenen met de formule:
$V = G \cdot h$
Daarin is G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte.

Omdat $G = 25{,}6 \cdot 72{,}8 = 1863{,}68$ m^2 en $h = 138{,}6$ m is $V = 1863{,}68 \cdot 138{,}6 \approx 258306$ m^3.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Het tweede blok bestaat uit negen verdiepingen. Bereken de inhoud van één zo'n verdieping in m^3. Rond je antwoord af op gehelen.

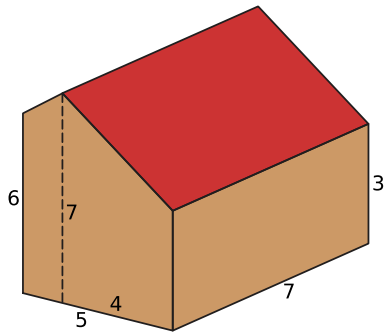
b Rens maakt een schaalmodel van één van de torens. De hoogte van het schaalmodel is 11,55 centimeter en de begane grond is 2,13 centimeter bij 6,07 centimeter. Bereken de inhoud van het schaalmodel in cm^3, rond je antwoord af op gehelen.

Opgave 4

Bekijk het huis.

a Leg uit waarom het huis de vorm van een prisma heeft.

b Bereken de inhoud van het huis.



Figuur 8

Voorbeeld 2

De piramide van Cheops is de oudste van de drie piramides van Gizeh. Met een oorspronkelijke hoogte van 147 meter (nu 135 meter, het grondvlak is hetzelfde gebleven) is de piramide van Cheops niet alleen de oudste, maar ook de grootste van de piramides van Gizeh. Ze heeft dan ook de bijnaam Grote Piramide.

De inhoud van de oorspronkelijke piramide was 2592100 m^3.
Bereken de inhoud van de piramide op dit moment.

Figuur 9

Antwoord

De formule voor de inhoud van een piramide is: $V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Hierin is G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte.
De inhoud en de hoogte van de oorspronkelijke piramide zijn bekend, vul deze in de formule in en bereken G: $G = 52900$ m^2.

Het grondvlak is een vierkant, dus de zijden zijn: $\sqrt{52900} = 230$ m

De inhoud van de piramide op dit moment is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (230 \cdot 230) \cdot 135 = 2380500$ m^3.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt berekend dat $G = 52900$ m^2.

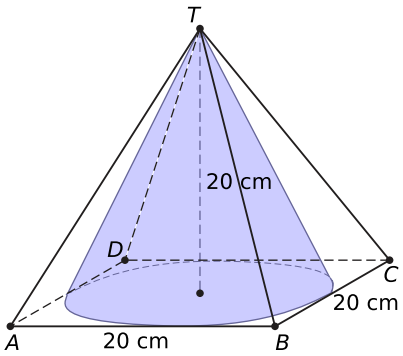
a Laat met een berekening zien hoe je aan dat getal komt.

b Met hoeveel m^3 is de inhoud van de oorspronkelijke piramide afgenomen?

Opgave 6

Je ziet hier een rechte piramide waarvan alle ribben gelijk zijn.
De kegel past exact in de piramide.

Laat met een berekening zien dat de kegel inderdaad een kleinere inhoud heeft dan de piramide.

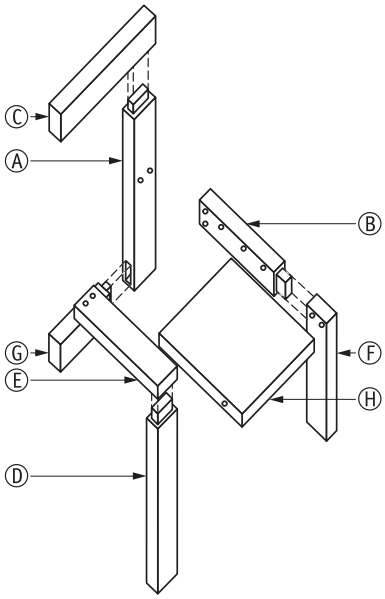


Figuur 10

Voorbeeld 3

Bekijk de Steltman-stoel, een ontwerp van Gerrit Rietveld uit 1963. De stoel is opgebouwd uit houten balken met diverse afmetingen.

Figuur 12



Figuur 11

Op de bouwtekening kun je goed zien hoe de stoel is opgebouwd. De afmetingen (in mm) van de onderdelen zijn als volgt:

A	44 x 100 x 635	B	44 x 100 x 590	C	44 x 100 x 456	D	44 x 100 x 385
E	44 x 100 x 400	F	44 x 100 x 400	G	44 x 100 x 290	H	44 x 356 x 400

Tabel 1

Bereken het totale aantal dm^3 hout dat nodig is voor de stoel. Zoek uit welke afmetingen een doos in de vorm van een balk moet hebben waar de stoel precies in past als hij in elkaar is gezet.

Antwoord

Bereken de inhoud door de inhoud van alle balken apart te berekenen en ze bij elkaar op te tellen. inhoud $= 44 \cdot 100 \cdot 635 + 44 \cdot 100 \cdot 590 + 44 \cdot 100 \cdot 456 + 44 \cdot 100 \cdot 385 + 44 \cdot 100 \cdot 400 + 44 \cdot 100 \cdot 400 + 44 \cdot 100 \cdot 290 + 44 \cdot 356 \cdot 400 = 20152000$ $mm^3 = 20{,}152$ dm^3.

Bereken hoe groot de breedte, diepte en hoogte van de stoel zijn om uit te zoeken hoe groot de doos moet zijn waar de stoel precies in past. Kijk goed waar deze afmetingen het grootst zijn.

Breedte: $44 + 356 + 100 = 500$ mm.
Diepte: $590 + 100 = 690$ mm.
Hoogte: $100 + 635 = 735$ mm.

De doos moet minimaal deze afmetingen hebben: $500 \times 690 \times 735$ mm.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

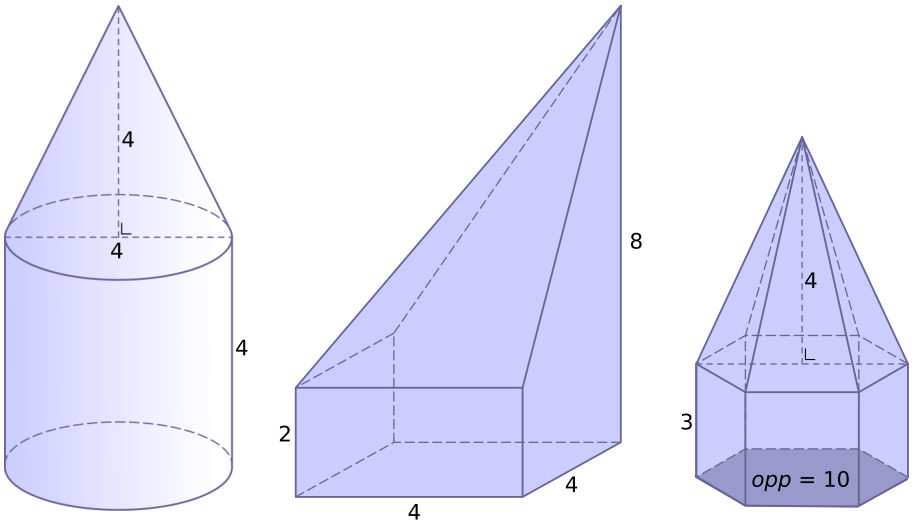
a Bij de bouwtekening zijn er op een aantal plaatsen wat uitstekende stukjes hout te zien die zijn bedoeld om de stoel in elkaar te lijmen. Waarom wordt bij de berekening van de inhoud van de stoel geen rekening gehouden met deze stukjes hout?

b De stoel kun je ook als bouwpakket in een doos stoppen, dan is er een veel minder grote doos nodig. Stel je wilt een doos gebruiken met een hoogte van 132 millimeter, een lengte van 635 millimeter en een breedte van 400 millimeter. Passen daar alle onderdelen in? Leg je antwoord uit.

Verwerken

Opgave 8

Bekijk de samengestelde figuren. Elk figuur bestaat uit meerdere bekende ruimtelijke figuren.



Figuur 13

Bereken de inhoud van deze figuren. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal.

Opgave 9

Bekijk de foto van het olympisch zwemstadion in Beijing. Het gebouw stelt een ijsblokje voor met daarin watermoleculen.

Het gebouw heeft een hoogte van 31 meter en het grondvlak is vierkant. De inhoud van het gebouw is 971199 m^3.
Bereken de lengte en de breedte van het gebouw.

Figuur 14

Opgave 10

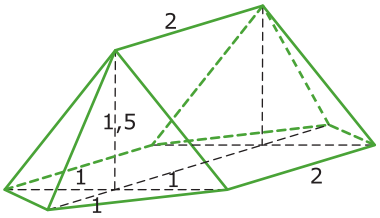
De vaas in de afbeelding heeft de vorm van een afgeknotte kegel. De kegel is precies op een derde afgeknot. De hoogte van de niet-afgeknotte kegel is 45 centimeter, de bovencirkel heeft een diameter van 21 centimeter en de ondercirkel heeft een diameter van 7 centimeter.

Bereken de inhoud van de vaas in cm^3. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Figuur 15

Opgave 11

Bekijk deze afbeelding van een tent met een symmetrische vorm.



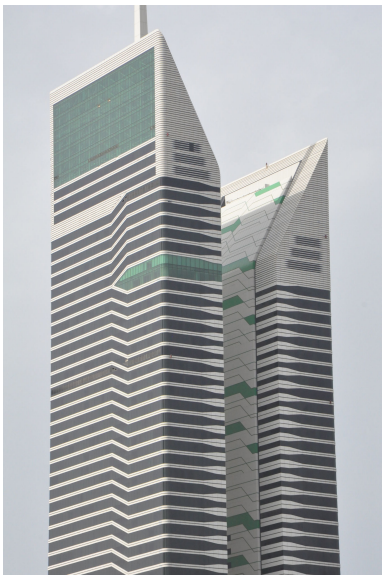
Figuur 16

Bereken de inhoud van deze tent.

Opgave 12

Bekijk de afbeelding van een hotel in Dubai genaamd Nassima Tower.

De linker toren is 270 meter hoog (zonder antenne) en telt zestig verdiepingen. Het bovenste gedeelte is aan één kant afgeschuind en bestaat uit negen verdiepingen. De lengte van de toren is 60 meter en de breedte is 20 meter.
Bereken de inhoud van de linker toren in m^3 en rond je antwoord af op gehelen.



Figuur 17

Opgave 13

Bekijk de foto van de Guangzhou Yuan, een wolkenkrabber in China.

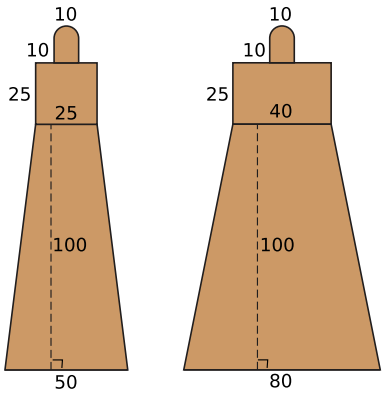
Het gebouw telt 33 verdiepingen en heeft een 47 meter breed rond gat in het midden. Het gebouw biedt 85000 m^2 kantoorruimte en heeft een totale inhoud van 396666 m^3. Bij de berekening van de inhoud is er van uit gegaan dat het gebouw de vorm van een cilinder heeft waaruit een kleinere cilinder is weggesneden. De diepte van het gebouw is 30 meter.
Bereken de hoogte van het gebouw in meter en rond af op gehelen.

Figuur 18

Opgave 14

Bekijk de beroemde lemen Sankore Moskee in Timboektoe.

Een student bouwkunde maakt van leem een maquette van een symmetrische toren, bestaande uit ruimtelijke figuren, gebaseerd op de vorm van de Sankore Moskee zoals je die vanaf het zichtpunt van de foto ziet. Het zijaanzicht en het vooraanzicht zijn afgebeeld; de maten zijn in centimeter.



Figuur 20

Figuur 19

De formule voor de inhoud van een bol is: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Hierin is r de straal van de bol.

Hoeveel liter leem heeft de student voor deze maquette nodig?
Rond af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 15: De toren van Pisa

Bekijk deze doorsnede van de toren van Pisa.

De toren is aan één kant ruim twee meter de grond in gezakt. Bekijk de schematische tekening van de toren van Pisa. Hieruit lees je af dat de hoogte van de begane grond tot en met de vijfde verdieping 41,726 meter is. Iedere verdieping (zonder de muren) heeft een diameter van ongeveer 7,7 meter.

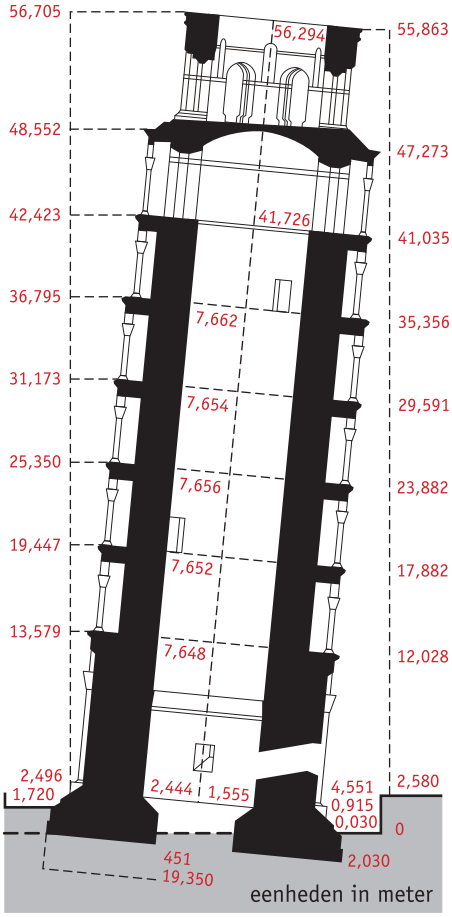
a Welke ruimtelijke figuren herken je in de vorm van de toren van Pisa?

b Bereken de inhoud van de toren van de begane grond tot en met de vijfde verdieping zonder de muren mee te rekenen. Geef je antwoord in m^3 en rond af op gehelen.

De toren werd in drie stappen opgebouwd. Na de bouw van de derde verdieping ging de toren hellen. Later werd de bouw hervat. Toen al merkte men op dat de verdiepingen scheef stonden, en er werd besloten die scheefheid in de volgende verdiepingen te neutraliseren door aan de ene zijde meer mortel te gebruiken dan aan de andere zijde. De bouw viel opnieuw stil. Toen de bouw van de bovenste verdieping begon, was de toren al sterk naar de andere zijde gekanteld. Weer werd besloten dit op te lossen; de bovenste verdieping werd opnieuw recht gebouwd. Daar waren ingrijpende aanpassingen voor nodig. Bekijk de tekening.

c Welke opvallende aanpassing is gedaan om ervoor te zorgen dat de bovenste verdieping minder scheef kwam te staan?

d Waarom kun je nu niet meer zo gemakkelijk de inhoud van de bovenste verdieping berekenen?



Figuur 21

Opgave 16: De Waura-indianen

De Waura-indianen wonen in het Amazonegebied in Brazilië. Hun dorpen bestaan uit een aantal grote huizen. Zo'n huis is afgebeeld.

Je kunt het huis wiskundig beschrijven als een halve cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 meter hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 meter.

Figuur 22

Voor de inhoud van een bol geldt: $V_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Hierin is r de straal van de bol.

Bereken de inhoud van het met riet bedekte huis. Geef je antwoord in m^3. Rond af op gehelen.

Testen

Opgave 17

Deze stenen vijzel met stamper bestaat uit een wat poreuze soort steen met een soortelijke massa van 2,1 gram/cm^3. De vijzel zelf heeft ongeveer de vorm van een balk met een vierkant grondvlak en bovenvlak van 14×14 cm. De vier opstaande ribben zijn 8 cm. In die vijzel is een halve bol zo uitgeslepen, dat het diepste punt van die bol 2,5 cm boven het grondvlak zit.

De inhoud van een bol met straal r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$.

Figuur 23

a Hoeveel weegt deze vijzel in grammen nauwkeurig?

b Af en toe moet deze vijzel worden ingesmeerd met een bepaalde olie. Hoe groot is de oppervlakte van de vijzel in cm^2 nauwkeurig?

Opgave 18

Uit Wikipedia november 2016: “Een obelisk is een gedenknaald. Het gaat om een vierkante, naar boven toe iets dunner wordende zuil of kolom, met een piramidevormige stompe punt, meestal van graniet gemaakt.”
Neem aan dat een bepaalde obelisk bestaat uit een 16 m hoge afgeknotte piramide met een grondvlak van $1{,}8 \times 1{,}8$ m en een bovenvlak van $1{,}0 \times 1{,}0$ m. Op dit bovenvlak staat een piramide met opstaande zijden van 2,0 m.

a Hoeveel hoog is deze obelisk in dm nauwkeurig?

b Graniet heeft een soortelijke massa van 2,7 g/cm^3. Hoe zwaar is zo'n obelisk als hij van graniet wordt gemaakt?

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.