

1.1 Lengte en oppervlakte

Inleiding

In de kunst en architectuur spelen materiaalgebruik en visuele indruk een belangrijke rol. Materiaalverbruik en kosten hangen daar sterk mee samen. Vóór kunstwerken en gebouwen gerealiseerd zijn, worden visualisaties en kostenramingen gemaakt. Hierbij wordt ook gebruik gemaakt van wiskunde. In dit onderwerp leer je te werken met vormen en hun eigenschappen. In een later onderwerp leer je nog over visualisatie, onder andere over perspectief.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de omtrek en oppervlakte van vlakke figuren berekenen;
- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen.

Voorkennis

- de basisvormen rechthoek, driehoek, vierhoek, parallellogram, ruit, vlieger, cirkel, balk, prisma, cilinder, bol, piramide en kegel;
- lengte (bijvoorbeeld omtrek) en oppervlakte van een rechthoek, driehoek, cirkel en balk berekenen;
- werken met eenheden voor lengte en oppervlakte;
- rekenen met de stelling van Pythagoras.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk het driehoekige gedeelte van het gebouw in de [Inleiding](#). Het gebouw is 65 meter hoog. Onderaan is het gebouw 98 meter breed.

Bereken de oppervlakte van de voorgevel.

Uitleg 1

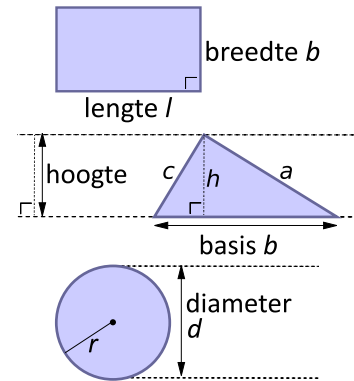
Als je om een rechthoekig zwembad met een lengte van 20 meter en een breedte van 10 meter loopt, dan leg je in totaal minstens $20 + 10 + 20 + 10 = 60$ meter af. Dit is de omtrek van het zwembad.

Als het zwembad helemaal is bedekt met een mat, dan is de mat $10 \cdot 20 = 200 \text{ m}^2$ groot. De oppervlakte van de mat is 200 m^2 .

De omtrek van een vlakke figuur is de som van de lengtes van de zijden en/of gebogen randen.

De oppervlakte van een vlakke figuur is de grootte van het vlak van de figuur.

- Voor een rechthoek geldt:
 $omtrek = 2 \cdot lengte + 2 \cdot breedte$
 $oppervlakte = lengte \cdot breedte$
- Voor een driehoek geldt:
 $omtrek = a + b + c$
 $oppervlakte = \frac{1}{2} \cdot basis \cdot hoogte$
- Voor een cirkel met straal r geldt:
 $omtrek = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$
 $oppervlakte = \pi \cdot r^2$

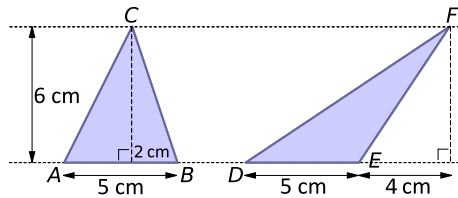


Figuur 2

Veel figuren kun je verdelen in rechthoeken, halve rechthoeken, driehoeken en (delen van) cirkels. En soms heb je voor het berekenen van lengtes de stelling van Pythagoras nodig.

Opgave 1

Je ziet hier twee verschillende driehoeken.

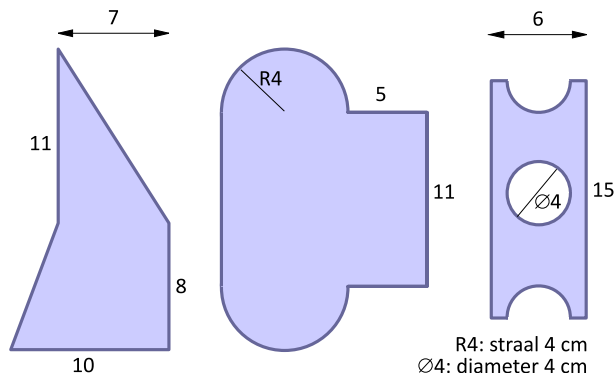


Figuur 3

- Waarom hebben ze dezelfde oppervlakte?
Hoe groot is die oppervlakte?
- Welke van beide driehoeken heeft de grootste omtrek?
- Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien, dat $BC = \sqrt{40}$ cm.
- Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ in mm nauwkeurig.

Opgave 2

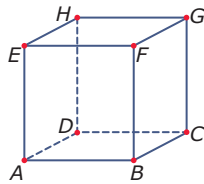
Je ziet hier drie vormen. Neem aan dat alle hoeken die recht lijken dat ook zijn en alle bogen die op cirkelbogen lijken echte cirkelbogen zijn. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 4

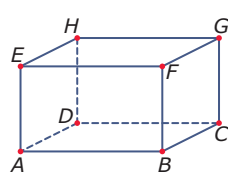
Bereken van elke vorm de oppervlakte in mm^2 en de omtrek in mm nauwkeurig.

Uitleg 2



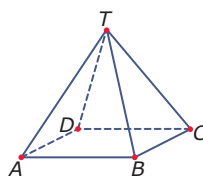
kubus

Alle ribben even lang, alle grensvlakken zijn vierkanten.



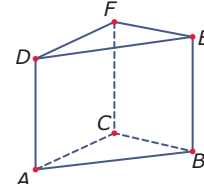
balk

Alle grensvlakken zijn rechthoeken (of vierkanten).



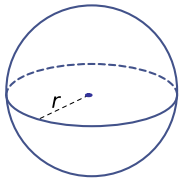
piramide

Eén grondvlak (een veelhoek), alle andere grensvlakken zijn driehoeken die samen komen in de top T .



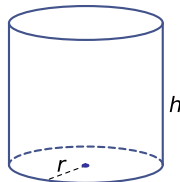
prisma

Twee overstaande congruente veelvlakken, alle andere grensvlakken zijn rechthoeken.



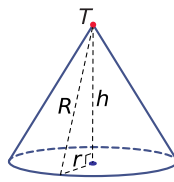
bol

Alle punten op de bol liggen even ver (straal r) van het middelpunt van de bol.



cilinder

Twee grensvlakken zijn cirkels met straal r , daartussen zit één gebogen buisvormig grensvlak met hoogte h .



kegel

Het grondvlak is een cirkel met straal r en daarop staat één gebogen vlak met top T .

Figuur 5

De oppervlakte van een ruimtelijke figuur is de som van de oppervlaktes van alle grensvlakken samen.

Van een ruimtelijk figuur kun je een uitslag tekenen. De oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag.

Bij kubus, balk, piramide, prisma bepaal je dus de oppervlaktes van alle vlakke grensvlakken.

Maar bol, cilinder en kegel hebben gebogen grensvlakken. Daarvoor gebruik je deze oppervlakteformules:

figuur	formule oppervlakte
bol	$oppervlakte = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
cilinder	$oppervlakte = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
kegel	$oppervlakte = \pi \cdot r \cdot R + \pi \cdot r^2$

Tabel 1

Als je de kegel goed bekijkt, zie je (stelling van Pythagoras), dat $R = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Dus is ook: $oppervlakte(kegel) = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$.

Opgave 3

Je hebt een set holle aluminium ruimtefiguren. Ze bestaan dus alleen uit hun grensvlakken. Je hebt:

- een kubus met ribben van 10 cm;
- een balk met ribben van 8, 10 en 12 cm;
- een piramide met een vierkant grondvlak van 8×8 cm en opstaande ribben van 12 cm;

- een prisma met grondvlak en bovenvlak een gelijkzijdige driehoek met zijden van 8 cm en opstaande ribben van 12 cm;
- een bol met een diameter van 16 cm;
- een cilinder met een diameter van 16 cm en een hoogte van 10 cm;
- een kegel met een diameter van 16 cm en een hoogte van 10 cm.

a Bereken van elk van deze figuren de oppervlakte in cm^2 nauwkeurig.

Vier van deze ruimtelijke figuren zijn in elkaar gezet door platte grensvlakken aan elkaar te lassen langs de ribben van de figuur.

b Bereken bij elk van deze vier figuren de totale lengte van de lasnaad.

De cilinder en de kegel zijn gelast langs de cirkelvormige platte grensvlakken en over één recht lijnstuk over de gebogen grensvlakken.

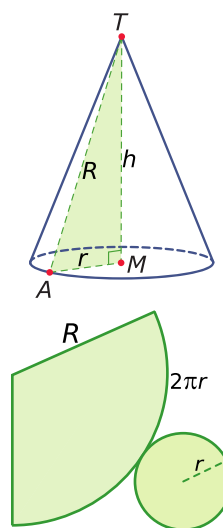
c Bereken bij elk van deze figuren de totale lengte van de lasnaad in mm nauwkeurig.

Opgave 4

Je ziet een rechte kegel met top T en als grondvlak een cirkel met straal $MA = r$. Het lijnstuk TM is de hoogte h van de kegel.

De uitslag van zo'n kegel bestaat uit de grondcirkel en de opgevouwen kegelmantel. Deze kegelmantel is een cirkelsector met straal $AT = R$ en middelpunt T .

- a** Leg uit waarom de kegelmantel het $\frac{2\pi r}{2\pi R}$ deel van een cirkel met een oppervlakte van πR^2 is.
- b** Schrijf een zo eenvoudig mogelijke formule voor de oppervlakte van de kegelmantel op.
- c** Waarom is $R = \sqrt{r^2 + h^2}$?
- d** Laat nu zien hoe je aan de formule voor de oppervlakte van een kegel met straal r en hoogte h komt.
- e** Laat ook zien hoe je aan de formule voor de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h komt.
- f** En hoe zit het met de oppervlakte van een bol met straal r ?



Figuur 6

Theorie en voorbeelden

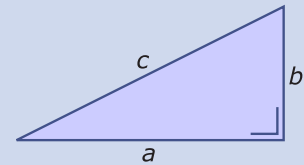
Om te onthouden

De **omtrek** van een vlakke figuur is de som van de lengtes van de zijden en/of gebogen randen. Voor het berekenen van lengtes moet je soms de **stelling van Pythagoras** gebruiken.

De **oppervlakte** van een vlakke figuur is de grootte van het vlak van de figuur.

Handige formules:

vlakke figuur	omtrek	oppervlakte
rechthoeklengte l , breedte b	$2 \cdot l + 2 \cdot b$	$l \cdot b$
driehoekzijden a , b , c basis b , hoogte h	$a + b + c$	$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
cirkelstraal r , diameter d	$\pi \cdot d$ of $2\pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$



Figuur 7 Stelling van Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{dus } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{en } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Tabel 2

Van een ruimtelijke figuur is de oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van de uitslag ervan.

Voor ruimtelijke figuren met alleen platte grensvlakken is de oppervlakte gelijk aan de som van de oppervlaktes van die grensvlakken.

Voor ruimtelijke figuren met ook gebogen grensvlakken bestaan formules.

figuur	formule oppervlakte
bol	$opp = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
cilinder	$opp = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
kegel	$opp = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$

Tabel 3

Voorbeeld 1

Een rond tafelblad heeft een omtrek van 5,65 meter. Bereken de oppervlakte van dit tafelblad.

Antwoord

Als de straal van dit tafelblad r is, geldt:

$$5,65 = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$r = \frac{5,65}{2 \cdot \pi} \approx 0,9$$

De oppervlakte van de tafel is $\pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot 0,9^2 \approx 2,54 \text{ m}^2$.

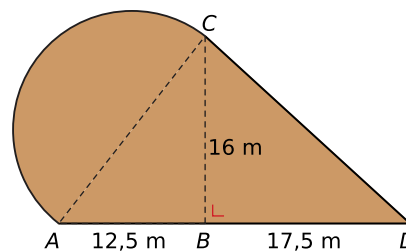
Opgave 5

- Een gelijkzijdige driehoek, waarvan dus alle zijden even lang zijn, heeft een omtrek van 36 centimeter. Bereken de lengte van een zijde.
- Een rechthoek heeft een omtrek van 100 centimeter. De breedte is 17 centimeter. Bereken de lengte.
- Een vierkant heeft een omtrek van 12 centimeter. Bereken de oppervlakte van de grootste cirkel die in dit vierkant past. Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.
- Een cirkel heeft een oppervlakte van 2 m^2 . Bereken de straal van deze cirkel. Rond je antwoord af op cm.

Opgave 6

Bekijk dit kladje van een architect. Het is het grondvlak van een schoolgebouw. Het grondvlak bestaat uit driehoek ACD plus een halve cirkel met middelpunt M .

- Bereken de totale oppervlakte van dit grondvlak.
- Het gebouw heeft geen verdiepingen en een plat dak. De rand van dit dak zit 3,5 m boven de begane grond. Bereken de totale oppervlakte van de gevel van het gebouw, inclusief deuren en ramen.

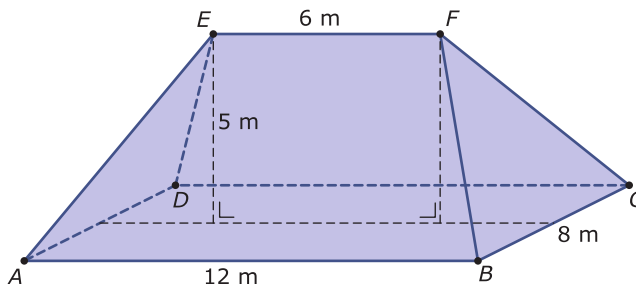


Figuur 8

Voorbeeld 2

Bekijk de figuur. Het is een schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$. De nok EF van het dak zit precies boven het midden van het grondvlak. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia (een trapezium is een vlakke figuur met twee evenwijdige zijden).

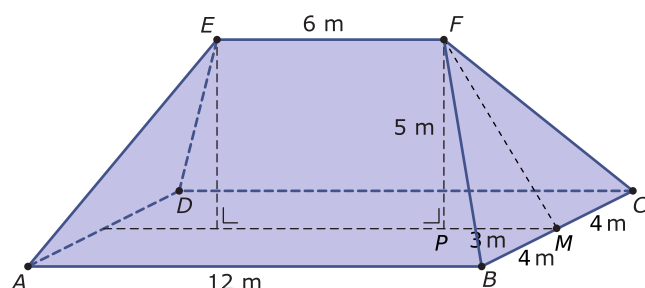
Bereken de oppervlakte van de twee gelijkbenige driehoeken.



Figuur 9

Antwoord

Door de symmetrie zijn de oppervlaktes van beide driehoeken even groot.



Figuur 10

Bekijk $\triangle BCF$. M is het midden van BC , dus de hoogte is FM .

De oppervlakte is: $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF$ met $BC = 8$

P ligt loodrecht onder F en er geldt: $FP = 5$ en $PM = 3$.

$$FM^2 = PM^2 + FP^2$$

$$34 = 3^2 + 5^2$$

$$FM = \sqrt{34}$$

De oppervlakte van $\triangle BCF$ is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{34} \approx 23,3 \text{ m}^2$.

Opgave 7

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

Grensvlak $ABEF$ van de samengestelde figuur is een symmetrisch trapezium.

- Uit welke bekende vlakke figuren zou het trapezium opgebouwd kunnen zijn?
- Bereken de oppervlakte van het trapezium $ABFE$ in m^2 . Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de totale oppervlakte van het dak in m^2 zonder het grondvlak. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 8

Deze dobbelsteen heeft de vorm van een piramide waarvan het grondvlak en de drie zijvlakken alle vier gelijk aan elkaar zijn. Ze hebben de vorm van een gelijkzijdige driehoek. Zo'n vorm heet wel een regelmatig viervlak. Bereken de oppervlakte van zo'n regelmatig viervlak waarvan de ribben 7,5 centimeter lang zijn.



Figuur 11

Voorbeeld 3

De kegelvorm inspireert veel kunstenaars. Zo ook Cosimo Pizzulli die dit kunstwerk in Beverly Hills heeft ontworpen.

Een vergelijkbaar kunstwerk is ook kegelvormig en heeft een hoogte van 12 meter. Het grondvlak van de kegel heeft een omtrek van 11 meter.

De formule voor de oppervlakte van een kegel is $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$ met h de hoogte van de kegel en r de straal van het grondvlak van de kegel.

Bereken de oppervlakte van het kegelvormige kunstwerk.

Antwoord

De hoogte $h = 12$ meter.

Om de formule voor de kegeloppervlakte volledig te kunnen invullen, heb je ook straal r van het grondvlak nodig. Omdat je weet wat de omtrek van het grondvlak is, kun je deze straal berekenen.

$$11 = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$r = \frac{11}{2 \cdot \pi} = 1,75 \text{ m}$$

$$\text{De oppervlakte van de kegel is: } \pi \cdot 1,75 \cdot \sqrt{1,75^2 + 12^2} + \pi \cdot 1,75^2 = 76,3 \text{ m}^2.$$



Figuur 12

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- a Bereken de oppervlakte van het grondvlak van het kegelvormige kunstwerk.
De oppervlakte van een kegel bestaat uit het grondvlak en de kegelmantel.
- b Bereken de oppervlakte van de kegelmantel van het kunstwerk.

Opgave 10

Bekijk het cilindervormige blik tomaten. Het blik is 11,1 centimeter hoog. De diameter van de cirkelvormige bodem is 9,8 centimeter.

Rondom de bodem en rondom het bovenvlak van het blik is een stevige strip bevestigd.

- a Hoeveel centimeter strip is voor dit blik gebruikt?
- b Bereken de oppervlakte van dit cilindervormige blik.
Geef je antwoord in vierkante meter en rond af op twee decimalen.

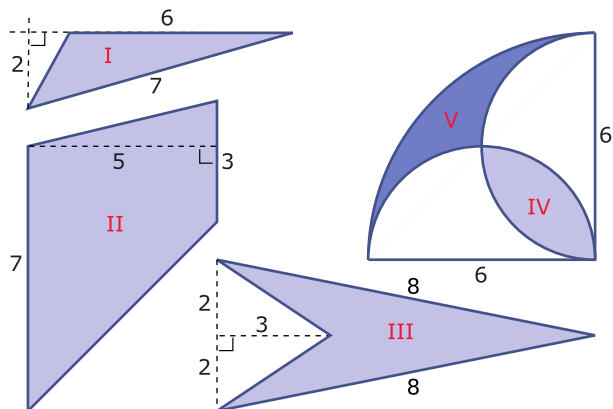


Figuur 13

Verwerken

Opgave 11

Je ziet hier vijf genummerde figuren. Alle afmetingen zijn in cm



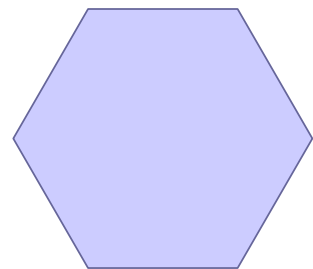
Figuur 14

Bereken van elk van deze figuren de oppervlakte.

Opgave 12

Gegeven is een regelmatige zeshoek met zijden van 4 cm.

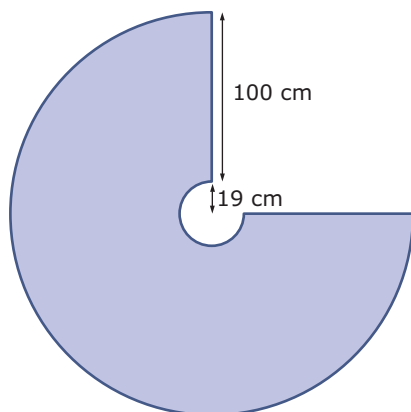
- Laat zien, hoe je deze zeshoek in zes gelijkbenige driehoeken kunt verdeelen.
Met wat voor soort bijzondere driehoeken heb je hier te maken?
- Bereken de oppervlakte van deze zeshoek. Rond je antwoord af op één decimaal.



Figuur 15

Opgave 13

Arabische dansende derwisjen dragen vaak een zogenaamde kegelrok. Dat is een breed uitlopende rok die, als de stof stijf zou zijn, de vorm heeft van een afgeknotte kegel. Je ziet het patroon (de uitslag) van zo'n kegelrok.



Figuur 17

Bereken hoeveel cm^2 stof er voor deze rok nodig is. Rond je antwoord af op één decimaal.

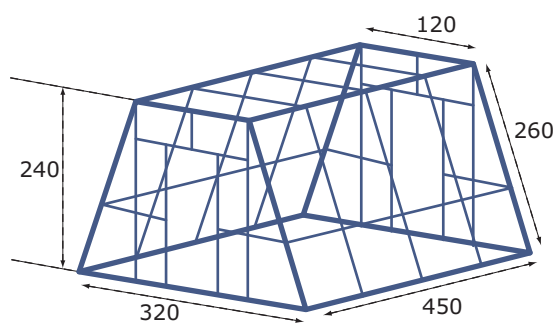


Figuur 16

Opgave 14

Bekijk de plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in centimeter. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in m^2 die voor deze plantenkas nodig is.



Figuur 18

Opgave 15

Bekijk de lamp met een kapje in de vorm van een afgeknotte kegel. De hoogte van de niet-afgeknotte kegel is 20 centimeter, de bovencirkel heeft een diameter van 15 centimeter en de ondercirkel een diameter van 30 centimeter.

De formule voor de oppervlakte van de kegelmantel is $\text{oppervlakte} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$. Hierin is h de hoogte van de kegel en r de straal van de grondcirkel van de kegel.

- Bereken de oppervlakte van de kegelmantel van de niet-afgeknotte kegel. Geef je antwoord in cm^2 en rond af op gehele.
- De diameter van het grondvlak van de niet-afgeknotte kegel is 30 centimeter, de diameter van de kleine kegel die eraf wordt gehaald is 15 centimeter. Dat is dus precies de helft. Bereken de hoogte van de kleine kegel die eraf wordt gehaald.
- Bereken de oppervlakte van het materiaal van het kapje.



Figuur 19

Opgave 16

Op de binnenplaats van het Louvre in Parijs staat een grote glazen en metalen piramide, die fungeert als hoofdingang van het museum.

Bekijk het vooraanzicht van de piramide met de ingang. De andere drie zijden hebben geen opening.

De piramide heeft een hoogte van 21,65 meter en een lengte en breedte van 35,42 meter. Ze bestaat uit 603 ruitvormige en 70 driehoekige glazen segmenten. De oppervlakte van een driehoek is hier precies de helft van die van een ruit. Twee driehoeken samen vormen een ruit. Als je de opening bij de ingang dicht zou maken, dan zou je daar nog 5 ruiten en 10 driehoeken voor nodig hebben.

Bereken de oppervlakte van één zo'n ruitvormig segment in m^2 en rond je antwoord af op twee decimalen. Houd geen rekening met de oppervlakte van het metaal.

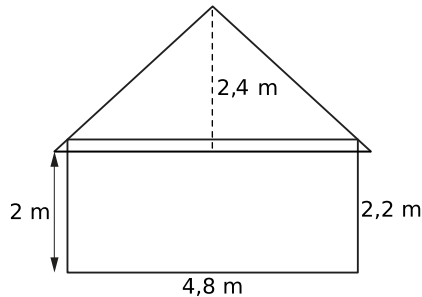


Figuur 20

Toepassen

Opgave 17: Guragevolk in Ethiopië

Bekijk de afbeelding met een woonhuis van het Guragevolk in Ethiopië, dat bestaat uit een cilinder en een kegel. Het vooraanzicht van zo'n woonhuis is afgebeeld.



Figuur 22

De dakbedekking loopt wat langer door, waardoor de diameter van de dakbedekking 5,2 m en de hoogte ervan 2,4 m is.

Bereken de oppervlakte van het woonhuis. Reken daarbij de vloer niet mee.

Geef het antwoord in een geheel aantal m^2 .



Figuur 21

Opgave 18: De Waura-indianen

De Waura indianen wonen in het Amazonegebied in Brazilië. Hun dorpen bestaan uit een aantal grote huizen. Op de foto zie je zo'n huis. Je kunt het wiskundig beschrijven als een halve cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 m hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 m.

Voor de oppervlakte van een bol met straal r geldt:

$$\text{oppervlakte} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



Figuur 23

Bereken de oppervlakte van het met riet bedekte huis. De vloer telt dus niet mee. Geef je antwoord in m^2 . Rond af op gehelen.

Testen

Opgave 19

Je ziet een paar blokken uit een blokkenkist. De cilinder, de kegel en de bol hebben een even grote diameter. De hoogte van de cilinder en de kegel is twee keer deze diameter.

De oppervlakte van een bol met straal r is $4 \cdot \pi \cdot r^2$.

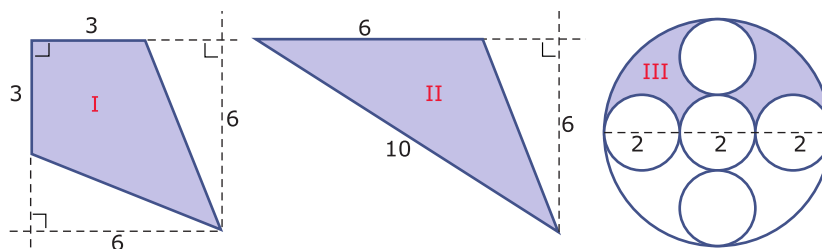
- Hoeveel keer zoveel lak is er nodig om de cilinder te verven, vergeleken met de bol?
- De oppervlakte van een kegel met straal r en hoogte h is $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$. Hoeveel keer zoveel lak is er nodig om de cilinder te verven, vergeleken met de kegel?



Figuur 24

Opgave 20

Je ziet hier drie genummerde figuren. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 25

Bereken de oppervlakte van elke figuur.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
