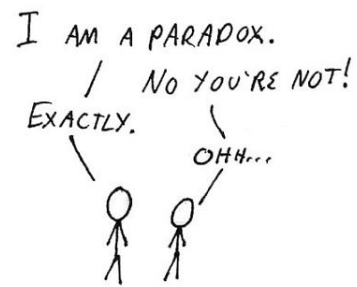


1.5 Altijd waar of nooit waar?

Inleiding

Sommige uitspraken zijn altijd waar en andere uitspraken zijn dan weer nooit waar. Je gaat nu bekijken hoe je er achter komt of je met één van beide te maken hebt. En dan zijn er ook nog paradoxen...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken wanneer een samengestelde bewering altijd waar (tautologie) of nooit waar (contradictie) is;
- een paradox herkennen en beschrijven.

Voorkennis

- de belangrijkste onderdelen van een logische redenering herkennen;
- logische redeneringen uiteen rafelen in beweringen en verbindingstekens voor 'en', 'of', 'niet', 'daaruit volgt';
- werken met venndiagrammen en waarheidstabellen.

Verkennen

Opgave V1

Κρήτες ἀεὶ ψεύδεται

Maar voor wie het Grieks niet beheerst er staat: "Kretenzers liegen altijd."

Dit is een uitspraak van de Kretenzische (inwoner van Kreta) filosoof **Epimenides**. Want vind je van deze uitspraak?

Opgave V2

Pinokkio's neus wordt langer als hij liegt.

Als Pinokkio zegt: "Mijn neus gaat nu groeien".

Wat is er dan aan de hand in de volgende situaties:

- Pinokkio's neus gaat na zijn uitspraak daadwerkelijk groeien.
- Pinokkio's neus gaat na zijn uitspraak niet groeien.



Figuur 2

Uitleg 1

Gegeven zijn de beweringen:

A: '12345 is een vijfvoud.'

B: '3 × 12345 is een vijfvoud.'

Ga de waarheidstabel nauwkeurig na.

De bewering $A \Rightarrow (A \vee B)$ heeft altijd waarheidswaarde 1.

Een bewering die altijd waar is, heet een tautologie.

Ga ook de volgende waarheidstabel nauwkeurig na.

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Tabel 1

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Tabel 2

De bewering $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ heeft altijd waarheidswaarde 0 en is dan in alle gevallen onwaar. Een bewering die altijd onwaar is, heet een contradictie (tegenstrijdigheid).

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit [Uitleg 1](#).

- Geef de betekenis van de beweringen $A \vee B$ en $A \Rightarrow (A \vee B)$ uit de eerste waarheidstabel.
- Geef een verklaring dat deze bewering altijd waar is. Doe dit in je eigen woorden.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit de [Uitleg 1](#).

- Geef de betekenis van $A \wedge B$ en $\neg A \vee \neg B$ uit de tweede waarheidstabel.
- Wat kun je zeggen over de relatie tussen $A \wedge B$ en $\neg A \vee \neg B$?
- De bewering $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ heeft in alle gevallen waarheidswaarde 0. Geef in eigen woorden een voorbeeld van deze contradictie.

Opgave 3

Gegeven is bewering A: "The Voice Kids is de moeite waard om naar te kijken."

Ga na of onderstaande uitdrukkingen een contradictie of een tautologie betreffen.

- $A \wedge \neg A$
- $A \Rightarrow A$
- $\neg A \Rightarrow \neg A$

Uitleg 2

Uitspraak 1: "Als twee dingen aan elkaar vastzitten en de één staat stil, dan staat de ander ook stil."

Uitspraak 2: "Als een voorwerp eerst naar rechts beweegt en daarna naar links, dan is er een moment geweest waarop de snelheid gelijk was aan nul."

Beide uitspraken lijken te kloppen.

Een vlieg vliegt naar rechts in de richting van de voorruit van een naar links rijdende trein. De vlieg knalt tegen de voorruit van de trein en blijft daarop vast zitten. Op dat moment zitten de vlieg en de trein aan elkaar vast. De vlieg had eerst een snelheid naar rechts en na de botsing naar links, dus hij heeft even stilgestaan. De trein heeft dan ook stilgestaan.

Dit verhaal is de bekende paradox van de vlieg en de trein. De uitgangspunten en de redenering lijken te kloppen, maar de conclusie niet.

Een paradox is een bewering die ondanks ogenschijnlijk juiste uitgangspunten leidt tot een tegenstrijdigheid of een logisch onacceptabele conclusie.

Opgave 4

De Rotterdammer Dennis zegt: "Alle Rotterdammers liegen altijd."

- a Beantwoord de vraag: "Spreekt Dennis de waarheid?"
- b Waarom is dit een paradox?

Opgave 5

"Hilberts hotel heeft altijd plaats", staat op het uithangbord.

Ik vraag of ze een kamer voor me vrij hebben. "U heeft geluk! We hebben iedereen een kamer op kunnen schuiven. Kamer 1 is daardoor vrij."

Vlak nadat ik mijn kamer betreden heb, klinkt een mededeling door de luidspreker. "Beste gasten, er is een bus met gasten gearriveerd en we hebben twintig kamers nodig. Iedereen wordt verzocht twintig kamers op te schuiven."

Ik doe mijn beklag bij de receptie. De receptionist antwoordt: "We mogen niemand een kamer weigeren. Zolang iedereen onze aanwijzingen opvolgt, is er altijd plaats voor nieuwe gasten."

Er komt een bus aan met oneindig veel passagiers. Er klinkt weer een mededeling: "We hebben oneindig veel nieuwe kamers nodig. Vermenigvuldig uw kamernummer met twee, dit wordt uw nieuwe kamernummer."

Inmiddels is de bus gearriveerd en stromen oneindig veel mensen de hal in. Waar moeten die naartoe? "Ze kunnen de oneven kamers nemen", legt de receptionist uit. "Er zijn immers oneindig veel oneven getallen. Door de verdubbeling van de kamernummers komen alle oneven getallen vrij."

- a 'Hilberts hotel' werd bedacht door de Duitse wiskundige David Hilbert. Wat wilde hij met dit hotel illustreren?
- b Waarom is dit een paradox?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **tautologie** is een samengestelde bewering die altijd waar is.

Een **contradictie** (of tegenspraak) is een situatie waarbij twee beweringen of waarnemingen die elkaar uitsluiten, tegelijkertijd waar moeten zijn. Het is dus een samengestelde bewering die nooit waar is.

Een **paradox** is een bewering die ondanks ogenschijnlijk juiste uitgangspunten leidt tot een tegenstrijdigheid of een logisch onacceptabele conclusie.

Een redenering is logisch correct als alle elementaire beweringen waarheidswaarde 1 hebben en de conclusie ook waarheidswaarde 1 heeft.

In de logica kunnen ook redeneringen die beweringen bevatten die waarheidswaarde 0 of 1 hebben, altijd waarheidswaarde 1 hebben. De redenering is dan een tautologie.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn twee uitspraken:

1. Het regent of het regent niet.
2. Het regent en het regent niet.

Onderzoek de waarheid van beide uitspraken met waarheidstabellen.

Antwoord

Beide uitspraken zijn samengesteld uit twee beweringen:

A : Het regent.

$\neg A$: Het regent niet.

Maak een waarheidstabel voor uitspraak 1.

De bewering $A \vee \neg A$ is altijd waar, uitspraak 1 is een tautologie.

Maak een waarheidstabel voor uitspraak 2.

De bewering $A \wedge \neg A$ is nooit waar, uitspraak 2 is een contradictie.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

Tabel 3

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

Tabel 4

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- a Geef de bewering $A \vee \neg A$ in woorden.
- b Geef de bewering $A \wedge \neg A$ in woorden.

Opgave 7

Gegeven is bewering P : "Ik rijd graag paard."

Ga na of de beweringen een contradictie of een tautologie betreffen.

- a $P \wedge \neg P$
- b $P \Rightarrow P$
- c $\neg P \Rightarrow \neg P$

Opgave 8

Ga na of de beweringen een contradictie of een tautologie betreffen.

- a Voor eeuwig en altijd.
- b Hij is bont en blauw.
- c Het is koud vuur.
- d Dat is keurig netjes.
- e Het regent en het is droog.
- f Hoe je het ook wendt of keert.

Voorbeeld 2

Bekijk driehoek ABC op een cirkel met AB door het middelpunt M van de cirkel.

Beredeneer dat $\angle C = 90^\circ$ en laat zien dat als de uitgangspunten waar zijn en de redenering logisch is, de conclusie een tautologie is.

Antwoord

Uitgangspunt A_1 : A , B , en C liggen op een cirkel (waar).

Uitgangspunt A_2 : AB gaat door M (waar)

$\Rightarrow CM = AM$ (waar) en $BM = CM$ (waar)

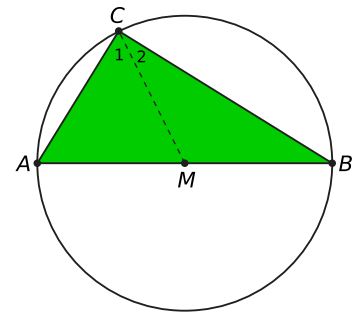
$\Rightarrow \angle B = \angle C_2$ (waar) en $\angle A = \angle C_1$ (waar).

Uitgangspunt A_3 : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (hoekensomdriehoek) (waar).

Conclusie: $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C = 180^\circ$, dus $\angle C = 90^\circ$ (waar).

Samengevat: Uit de uitgangspunten A_1 , A_2 , en A_3 volgt de conclusie.

Een bewijs uit de wiskunde is een tautologie.



Figuur 3

Opgave 9

De stelling van Thales luidt: een driehoek ingeschreven in een cirkel en waarvan één zijde een middellijn van de cirkel vormt, is een rechthoekige driehoek.

Noem nog minimaal twee van zulke tautologiën die je kent uit de wiskunde.

Opgave 10

Bekijk de redenering waaruit volgt dat $1 = 2$.

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$x(x - x) = (x + x)(x - x)$$

$$x = x + x$$

$$x = 2x$$

$$1 = 2$$

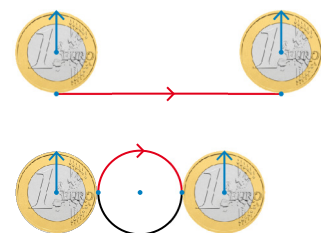
Wat gaat er mis in deze redenering?

Voorbeeld 3

Rol een muntstuk over een rechte lijn. De munt moet dan een afstand afleggen die gelijk is aan zijn omtrek om precies één rondje gedraaid te hebben.

Rol het muntstuk nu over een andere munt met dezelfde afmetingen. De munt moet nu een afstand afleggen die gelijk is aan de helft van zijn omtrek om precies één rondje gedraaid te hebben.

Dit is de bekende 'muntparadox'.



Figuur 4

Opgave 11

Bekijk de paradox in **Voorbeeld 3**.

- a Waarom lijkt dit een paradox?
- b Waarom is het geen paradox?

Verwerken

Opgave 12

Ga na of de uitdrukkingen een contradictie, een tautologie of geen van beide betreffen.

- a Hij staat te roepen en te tieren.
- b Het ijs is vloeibaar geworden.
- c In voor- en tegenspoed.
- d Het is schots en scheef.

Opgave 13

Toon bij elke bewering met een waarheidstabel aan of ze een tautologie, een contradictie of geen van beide is.

- a $\neg(\neg P) \Rightarrow P$
- b $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
- c $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
- d $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Opgave 14

Een paradox uit de oudheid is die van de krokodil.

Een krokodil rukte een moeder haar baby uit handen, en zegt: 'Als je zult raden wat ik ga doen, krijg je je kind terug, anders eet ik het op.' Radeloos roept de moeder 'O, je zult hem opeten!' 'Tja', zegt de krokodil, 'nu kan ik hem helaas niet teruggeven, want dan zou je verkeerd geraden hebben en moet ik hem dus wel opeten.' 'Nee', zegt de moeder, die nu weer tot bezinning komt, 'want als je mijn kind opeet, heb ik juist geraden, en moet je het dus teruggeven!' 'Kijk', zegt de krokodil, 'ik begrijp dat je een beetje van slag bent, maar dit is wel zo'n beetje het stomste antwoord dat je had kunnen geven. Ik ben namelijk een man van eer, en hecht er erg aan me te allen tijde aan mijn woord te houden.'

Leg uit waarom in dit verhaal sprake is van een paradox.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Opgave 15

De paradox van Russell luidt: "De barbier scheert iedereen die zichzelf niet scheert."

De vraag is: "Scheert de barbier zichzelf?"

Opgave 16

Lees het artikel van de NOS van 16-10-2014.

Hushovd spreekt zichzelf tegen

In Noorwegen verschijnt vandaag de biografie van ex-wielrenner Thor Hushovd. Het is een aaneenschakeling van anekdotes uit zijn lange en succesvolle carrière. Het Noorse krachtmens droeg meerdere dagen de gele trui in de Tour de France, won diverse Tour-etappes en werd in 2010 wereldkampioen op de weg.

Misschien is de meest opmerkelijke quote uit zijn biografie die over Lance Armstrong. In 2011 spraken de twee wielrenners over doping. Armstrong zei toen tegen Hushovd: 'We deden het allemaal'. De Noor zegt daar nu over: 'Ik wist niet wat ik hoorde. Hij vertelde daar gewoon dat hij doping gebruikte.'

Interview uit 2013

En die uitspraken van Hushovd in zijn biografie zorgen enigszins voor verwarring. Want daarmee spreekt hij zichzelf tegen. In een interview uit februari 2013, enkele weken nadat Armstrong op de bank bij Oprah dopinggebruik toegaf, zei Hushovd dat hij 'Lance nu heel erg anders ziet.' 'En dat hij het wielrennen voor gek heeft gezet.'

Hushovd liet in 2013 optekenen dat je op basis van geruchten over Armstrong niet kon zeggen of iemand doping had gebruikt. En toen de verslaggever hem vroeg of hij naïef was geweest als het om het dopinggebruik van Armstrong ging, antwoordde Hushovd: 'Ja, ik was zeker naïef. Je weet dat hij ziek is geweest en bijna dood was. Wie gaat dan zo met zijn lichaam om? Daarom koos ik ervoor om hem te geloven.'

Nu nog niet strafbaar

Volgens de huidige WADA-code kun je niet gestraft worden als je je mond houdt over dopinggebruik van anderen. Het actief wegmoffelen van bewijs is wel strafbaar. Dat verandert op 1 januari 2015. Dan wordt namelijk de nieuwe WADA-code van kracht. En dan wordt het verzwijgen van een dopingovertreding eveneens strafbaar.

Leg uit waarom de uitspraken van Hushovd een contradictie opleveren.

Opgave 17

Vraag: "Wat gebeurt er als een tijdreiziger terug in de tijd gaat en zijn grootvader vermoordt, voordat deze de vader of moeder van de tijdreiziger heeft kunnen verwekken?"

- a Het antwoord op deze vraag is een cyclus die zich eendeloos blijft herhalen. Omschrijf deze cyclus.
- b Is dit een paradox of een contradictie?
- c In de film 'Back to the Future' reist Marty McFly terug in de tijd en verstoort de ontmoeting van zijn ouders.

Wat moet hij doen om zichzelf in de toekomst heel te houden?

Toepassen

Opgave 18: Archimedes en de schildpad

Lees de paradox van Achilles en de schildpad die bedacht is door **Zeno van Elea**.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloopwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de schildpad zwaar en langzaam was.

‘Hoeveel voorsprong?’ vroeg hij de schildpad met een glimlach. ‘Tien meter’, antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit. ‘Dan ga jij zeker verliezen, vriend’ vertelde hij de schildpad, ‘maar laten we vooral rennen, als je dat graag wilt’. ‘Integendeel’, zei de schildpad, ‘ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen.’ ‘Kom op dan’, antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan eerst. Hij wist dat hij de superieure atleet was, maar hij wist ook dat de schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

‘Veronderstel’, begon de schildpad, ‘dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meter tussen ons snel kunt afleggen?’ ‘Zeer snel’, bevestigde Achilles. ‘En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?’ ‘Misschien een meter - niet meer’, zei Achilles na even nagedacht te hebben. ‘Zeer goed’, antwoordde de schildpad, ‘dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?’ ‘Zeer snel inderdaad!’ ‘En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u die afstand moet inhalen, ja?’ ‘Eh, ja’ zei Achilles langzaam. ‘En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen’ ging de schildpad stug door. Achilles zei niets.

‘En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen.’ ‘Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen’, antwoordde Achilles, nu al vermoeid. ‘En zo kunt u nooit de achterstand inlopen’, besloot de schildpad met een sympathieke glimlach.

‘U heeft gelijk, zoals altijd’, besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Leg uit waarom er in dit verhaal sprake is van een paradox.

Testen

Opgave 19

Toon bij elke bewering met een waarheidstabel aan of ze een tautologie, een contradictie of geen van beide is.

- a $\neg(\neg(\neg P)) \Rightarrow P$
- b $\neg(\neg(\neg P)) \wedge P$
- c $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Opgave 20

Lees het artikel van nu.nl van 20-04-2007.

Van Basten: Van Bommel spreekt zichzelf tegen

RIJSWIJK - Mark van Bommel spreekt zichzelf tegen en houdt zich vast aan zijn eigen waarheid. Dat zei bondscoach Marco van Basten vrijdagavond in het VARA/NPS-televisieprogramma Pauw & Witteman. 'Ik zou daarover liever persoonlijk met hem praten, maar dat heeft nu geen enkele zin meer.'

Interview

De voormalige sterspeler reageerde op een interview van Van Bommel in het weekblad *Voetbal International* waarin de middenvelder van Bayern München hard uithaalde naar de voorman van Oranje. Van Bommel wil niet meer onder Van Basten spelen. 'Hij komt steeds met argumenten die niet kloppen. Ik heb nooit bedankt voor Oranje, maar ik weiger in een ploeg te spelen waarvan hij trainer is', stelde Van Bommel onder meer.

Wrang

Van Basten: 'Ik vind dat wrang. We hebben juist heel veel met hem gesproken, zowel tijdens trainingen als in wedstrijdbesprekingen. We hebben veel energie in hem gestoken. Hij ontkent dat. Daar kan ik niets mee. Dan houdt het op voor mij.'

Beleving

Van Basten wilde Van Bommel geen leugenaar noemen. 'Hij heeft zijn beleving en ik heb mijn beleving. Ik vind dat wij heel veel discussies met hem hebben gevoerd over zijn rol en zijn taken bij Oranje. Hij zegt aan het einde van het verhaal in VI dat hij niet meer vrijuit kon voetballen door alle opdrachten die hij van ons zou hebben gekregen. Daarmee geeft hij aan dat wij wel degelijk met hem over bepaalde zaken hebben gesproken, lijkt mij. Dus hij spreekt zichzelf tegen, ja.'

Belang

Van Basten benadrukte nog wel dat hij er persoonlijk geen problemen mee zou hebben om Van Bommel 'in het belang van Oranje' ooit nog eens op te roepen. 'Maar de situatie is natuurlijk nu wel heel erg vervelend geworden. Hij heeft zich in dat interview heel erg tegen mij gekeerd. Dat werkt niet echt prettig, nee.'

Emoties

Desgevraagd liet Van Basten weten dat hij wel degelijk een warme kant heeft. Hij wordt namelijk nogal eens omschreven als een koele kikker. 'Ik ben misschien wat zakelijk en zal niet snel om de nek van iemand gaan hangen. Maar ik heb zeker emoties en gevoel. Ik ben niet koud. Maar ik vind dat je emoties niet altijd hoeft te tonen. Ik probeer altijd mezelf te blijven.'

Leg uit waarom van Basten vindt dat de uitspraken van van Bommel een contradictie opleveren. Heeft van Basten daarin gelijk?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
