

1.3 Als-dan-redeneringen

Inleiding

Veel redeneringen hebben een structuur van de vorm 'Als ..., dan ...'. Op de plaats van de stippeltjes staan dan eenvoudige proposities, of zelfs zinnen die uit meerdere proposities zijn samengesteld. Ook voor deze constructie bestaat een speciaal teken, dat je het 'daaruit volgt'-teken zou kunnen noemen. En soms geldt ook het omgekeerde van zo'n als-dan-redenering.

Je leert in dit onderwerp

- als-dan-redeneringen herkennen en onderzoeken op hun waarheidsgehalte, en het teken voor 'daaruit volgt' gebruiken.
- de begrippen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde' gebruiken.

Voorkennis

- de belangrijkste onderdelen van een logische redenering herkennen;
- logische redeneringen uiteen rafelen in beweringen en verbindingstekens voor 'en', 'of', 'niet';
- werken met venndiagrammen en waarheidstabellen.

Verkennen

Opgave V1

Vertel of je de onderstaande redeneringen waar of onwaar vindt.

Elk van deze redeneringen bestaat uit twee proposities P en Q .

Schrijf deze proposities op en ga na of ze waar of onwaar zijn.

- a Als 1234 een 2-voud is, dan is 3×1234 een 2-voud.
- b Als 1234 een 6-voud is, dan is 3×1234 een 6-voud.
- c Als 1234 deelbaar is door 2 dan is $1234 - 1$ deelbaar door 2.

Uitleg 1

Constructies van de vorm "als ..., dan..." komen in het dagelijks taalgebruik en in de wiskunde vaak voor. Bijvoorbeeld "Als ik een 6 haal voor mijn proefwerk, dan heb ik op mijn rapport gemiddeld een voldoende." Dit is een redenering van de vorm "als ..., dan ..." met daarin twee beweringen P en Q :

- P : "Ik haal een 6 voor mijn proefwerk."
- Q : "Ik heb op mijn rapport gemiddeld een voldoende."

Als-dan-redeneringen kun je schrijven als $P \Rightarrow Q$.

Het teken $\Rightarrow$ betekent 'daaruit volgt' en je noemt zo'n zin een implicatie.

Het is duidelijk dat de implicatie waar is als P en Q beiden waar zijn.

De implicatie is niet waar als P waar is en Q niet.

Lastiger wordt het als bewering P onwaar is. Toch is er dan geen reden om de waarheid van de implicatie in twijfel te trekken. In dit geval haal je geen 6 voor je proefwerk. Dan kun je nog gemiddeld een voldoende halen, maar je kunt ook gemiddeld een onvoldoende halen.

Beide beweringen kunnen best waar zijn en deze implicatie krijgt dan ook waarheidswaarde 1 als Q waar is en als Q onwaar is.

Dit levert deze waarheidstabel van de implicatie op.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 1

Opgave 1

Bekijk de waarheidstabel in **Uitleg 1**.

- a Waarom is $P \Rightarrow Q$ gemakkelijk in te vullen in de gevallen waarin $P = 1$?
- b Waarom is dit moeilijker in de gevallen waarin $P = 0$?
- c Leg uit waarom $P \Rightarrow Q$ waarheidswaarde 1 heeft als $P = 0$ en $Q = 0$.
- d Doe hetzelfde als $P = 0$ en $Q = 1$.

Opgave 2

Bekijk de redenering: "Als ik € 500 heb gespaard, dan ga ik op vakantie."

- a Geef de beweringen A en B waaruit deze redenering is opgebouwd.
- b Schrijf de redenering als implicatie.
- c Leg uit of de implicatie $A \Rightarrow B$ waar of niet waar is als $A = 1$ en $B = 0$.
- d Leg uit of de implicatie $A \Rightarrow B$ waar of niet waar is als $A = 0$ en $B = 0$.
- e Maak een waarheidstabel met daarin A , B , en $A \Rightarrow B$.

Uitleg 2

In de dagelijkse logica kun je niet elk willekeurig tweetal beweringen koppelen tot een nieuwe bewering $P \Rightarrow Q$. Er kan dan gemakkelijk onzin ontstaan. Bijvoorbeeld: "als de stelling van Pythagoras onwaar is, dan zijn alle driehoeken vijfhoeken". Bij een implicatie wordt vereist dat er een zinvolle relatie moet zijn tussen de als-bewering en de dan-bewering.

Bekijk de uitspraak P : "Ik slaag voor mijn eindexamen".

Elk van de volgende beweringen is als voorwaarde voldoende om de uitspraak P waar te laten zijn:

$V1$: "Al mijn eindcijfers zijn 8 of hoger."

$V2$: "Mijn laagste cijfer is een 7."

$V3$: "Ik heb één 6 en mijn andere cijfers zijn hoger."

Deze drie voorwaarden zijn niet allemaal strikt nodig, je kunt bijvoorbeeld ook slagen met een lijst met allemaal zessen. Dan voldoe je aan geen van de voorwaarden, maar toch is P waar.

Uit de voorwaarden $V1$, $V2$ en $V3$ volgt dat de uitspraak P waar is. Een bewering V is een voldoende voorwaarde voor P als geldt $V \Rightarrow P$.

Elk van de volgende beweringen is als voorwaarde nodig:

$N1$: "Ik heb geen 4 of lager behaald."

$N2$: "Meer dan de helft van mijn cijfers is boven de 5."

$N3$: "Al mijn cijfers zijn boven de 4."

Deze drie voorwaarden zijn geen van alle voldoende, je kunt bijvoorbeeld een lijst hebben met vier vijven en vijf zessen. Dan voldoe je aan alle voorwaarden, maar toch is P onwaar.

Als de persoon slaagt, dan moet ook voldaan zijn aan de voorwaarden $N1$, $N2$ en $N3$. Deze voorwaarden zijn nodig om te kunnen slagen. Een bewering N is een nodige voorwaarde voor P als geldt $P \Rightarrow N$.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

- a Leg uit waarom $V1$, $V2$, $V3$ geen van alle strikt nodig zijn opdat P waar is.
- b Waarom volgt uit de waarheid van P dat $N1$, $N2$ en $N3$ waar zijn?

c Vul de waarheidstabel in.

N_1	N_2	N_3	$N \Rightarrow P$

Tabel 2

Opgave 4

Bekijk de bewering:

“Ik mag vandaag stemmen voor de Tweede Kamerverkiezing in Nederland.”

- a Bedenk enkele voldoende voorwaarden bij deze bewering.
- b Bedenk enkele nodige voorwaarden bij deze bewering.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De constructie van de vorm ‘als ..., dan...’ komt in het dagelijks taalgebruik en in de wiskunde vaak voor.

In de logica kan een **als-dan-redenering** tussen twee beweringen worden weergegeven als $P \Rightarrow Q$. De uitdrukking $P \Rightarrow Q$ wordt een **implicatie** genoemd en het symbool $\Rightarrow$ heet het implicatieteken. De uitdrukking is logisch gelijkwaardig met $\neg P \vee Q$.

De **logische symbolen** $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\neg$ zijn verbindingsymbolen.

De waarheidstabel van $P \Rightarrow Q$ zie je hier.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 3

Als P niet waar is en Q waar is, dan is dit niet in strijd met de regel $P \Rightarrow Q$ (er kan nog steeds gelden dat als P , dan Q), en dan is $P \Rightarrow Q$ in dat geval waar. Ook als P en Q beide niet waar zijn, kan $P \Rightarrow Q$ waar zijn.

Een bewering P is een **voldoende voorwaarde** voor Q als geldt $P \Rightarrow Q$.

Een bewering R is een **nodige voorwaarde** voor Q als geldt $Q \Rightarrow R$.

Voorbeeld 1

Schrijf de zin “Zodra het buiten donker wordt, neemt het aantal autodiefstallen toe” als een implicatie.

Maak er een waarheidstabel bij.

Antwoord

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel 4

Twee beweringen:

P : “Het wordt donker buiten.”

Q : “Het aantal autodiefstallen neemt toe.”

Implicatie:

- Als het buiten donker wordt, dan neemt het aantal autodiefstallen toe.
- $P \Rightarrow Q$: “Het wordt donker buiten” $\Rightarrow$ “Het aantal autodiefstallen neemt toe.”

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Schrijf de implicatie andersom, zodat $Q \Rightarrow P$.
- Is de betekenis dan anders? Zo ja, in welk opzicht?
- Maak een waarheidstabel bij deze implicatie.

Opgave 6

Schrijf de uitdrukkingen op als implicatie.

- “Docenten die veel onvoldoendes geven, beheersen hun vak niet.”
- “Ik eet mijn hoed op als de achterkant van de maan van kaas blijkt te zijn.”
- “Een rode appel is rijp.”

Voorbeeld 2

Gegeven is een driehoek ABC en onderstaande beweringen over deze driehoek.

Q : “ $AB = BC = AC$ ”

R : “Hoek A = hoek B ”

S : “Hoek A = hoek B = 60 graden”

Welke van deze beweringen zijn noodzakelijke voorwaarden en welke zijn voldoende voorwaarden voor de bewering P : “ $AC = BC$ ”?

Antwoord

Bewering Q :

- voldoende voorwaarde, $Q \Rightarrow P$, want in Q staat al letterlijk $AC = BC$.

Bewering R :

- voldoende voorwaarde, $R \Rightarrow P$, want als hoek A gelijk is aan hoek B , dan is driehoek ABC gelijkbenig en daaruit volgt dat $AC = BC$.
- noodzakelijke voorwaarde, $P \Rightarrow R$, want als $AC = BC$, dan volgt daaruit dat driehoek ABC gelijkbenig is en dan zijn hoek A en B gelijk.

Bewering S :

- voldoende voorwaarde, $S \Rightarrow P$, want als hoek A en hoek B beide 60° zijn, dan is hoek C ook 60° (hoekensom driehoek). Dan is driehoek ABC gelijkzijdig en daaruit volgt dat $AC = BC$.

Opgave 7

Gebruik de beweringen uit **Voorbeeld 2**.

- a Welke van de beweringen P , R , en S zijn nodige en voldoende voorwaarden voor Q ?
- b Welke van de beweringen P , Q , en S zijn nodige en voldoende voorwaarden voor R ?

Opgave 8

Geef in de beweringen aan of Q een nodige of voldoende voorwaarde is voor P .

- a P : "Driehoek ABC is precies dezelfde als driehoek KLM ."
 Q : "Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek KLM ."
- b P : "Een kwadratische vergelijking heeft ten minste één oplossing."
 Q : "De discriminant van deze kwadratische vergelijking is groter dan 0."
- c P : "Jan is timmerman."
 Q : "Jan kan met een hamer overweg."
- d P : "Het is mogelijk om te schaatsen op het Sneekermeer."
 Q : "Het vriest in Friesland."

Opgave 9

Gegeven is de bewering S : "Vierhoek $ABCD$ is een vlieger".

Formuleer beweringen P , Q en R die aan deze voorwaarden voldoen.

- a P is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor S .
- b Q is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor S .
- c R is een nodige en voldoende voorwaarde voor S .

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de beweringen.

P : "Ik word 18 jaar."

Q : "Ik krijg een auto."

Hieruit kun je de implicatie $P \Rightarrow Q$ samenstellen: "Als ik 18 jaar word, dan krijg ik een auto". Hierbij kan een ontkenning worden gemaakt.

Laat met een waarheidstabel zien dat "Als ik geen 18 jaar word, dan krijg ik een auto" geen juiste ontkenning is.

Antwoord

De simpelste ontkenning in symbolen van $P \Rightarrow Q$ is $\neg(P \Rightarrow Q)$.

Bij de zin "Als ik geen 18 jaar word, dan krijg ik een auto", hoort de implicatie $\neg P \Rightarrow Q$.

Werk de gegevens uit in een waarheidstabel.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg P \Rightarrow Q$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Tabel 5

Conclusie: $\neg P \Rightarrow Q$ is niet logisch gelijkwaardig met $\neg(P \Rightarrow Q)$, dus dit is niet de ontkenning van $P \Rightarrow Q$.

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

- a Zoek uit of “Als ik 18 jaar word, dan krijg ik geen auto” een juiste ontkenning is.
- b Is $\neg P \Rightarrow \neg Q$ een juiste ontkenning van $P \Rightarrow Q$?
- c Wat is de juiste ontkenning van $P \Rightarrow Q$? Toon dit aan met een waarheidstabel.

Opgave 11

- a Leg met een voorbeeld uit waarom de ontkenning “Als ik geen 8 haal, dan heb ik een onvoldoende gehaald” onjuist is.
- b Is $P \Rightarrow \neg Q$ de ontkenning van $P \Rightarrow Q$? Leg je antwoord uit.

Verwerken**Opgave 12**

Bekijk de advertentie van de Postcodeloterij.

Noem twee als-dan-redeneringen die deze advertentie bevat.



Figuur 1

Opgave 13

Bekijk de als-dan-redenering.

“Als Tessa een voldoende haalt voor wiskunde, dan trakteert ze op taart.”

Formuleer de omkering van deze bewering. Heeft deze dezelfde betekenis? Waarom?

Opgave 14

Gegeven is de bewering K : “Vierhoek $ABCD$ is een rechthoek.”

Formuleer beweringen A , B en C die aan de volgende voorwaarden voldoen.

A is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor K .

B is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor K .

C is een nodige en voldoende voorwaarde voor K .

Opgave 15

Gegeven zijn de beweringen:

A : “Mensen zijn moe.”

B : “Mensen beleggen hun spaargeld verkeerd.”

- a Schrijf de zin als een implicatie.
- b Maak bij deze implicatie een waarheidstabel.
- c Zoek met een waarheidstabel uit of $\neg A \Rightarrow \neg B$ een ontkenning is van $A \Rightarrow B$.

Opgave 16

Toon aan dat $P \Rightarrow Q$ en $\neg P \vee Q$ logisch gelijkwaardig zijn.

Pas dit vervolgens toe op de uitdrukking: "Je verslaapt je niet nog een keer of je gaat eerder naar bed."

Toepassen**Opgave 17: Raadsel**

Dit raadsel ging enige tijd geleden viral op internet.

"Als Teresa's dochter mijn dochters moeder is, wat ben ik dan van Teresa?"

Los het raadsel op.

- A. Ik ben Teresa's oma.
- B. Ik ben Teresa's moeder.
- C. Ik ben Teresa's dochter.
- D. Ik ben Teresa's kleindochter.
- E. Ik ben Teresa.

Opgave 18: Anneke

Als Anneke intelligent is en hard studeert, dan haalt zij goede cijfers. Als ze goede cijfers haalt, zal ze het diploma halen. Als Anneke hard studeert, maar niet intelligent is, dan zal men waardering hebben voor haar inzet. Als haar inzet gewaardeerd wordt, zal zij het diploma halen. Als Anneke intelligent is, dan studeert ze hard.

Gebruik de volgende afkortingen:

I = Anneke is intelligent.

S = Anneke studeert hard.

G = Anneke haalt goede cijfers.

D = Anneke haalt diploma.

W = Anneke wordt gewaardeerd.

- a De redeneerstap in de eerste zin kan als volgt genoteerd worden: $I \wedge S \Rightarrow G$.
Noteer op dezelfde wijze als hierboven de redeneerstappen in de andere zinnen.
- b Neem aan dat Anneke intelligent is. Leg uit op basis van deze uitspraken of je kunt concluderen dat Anneke het diploma haalt.
- c Stel dat je weet dat Anneke niet slaagt. Wat is nu op basis van de gegevens te concluderen over haar intelligentie en haar studeren?

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C CE 2018)

Testen**Opgave 19**

Gegeven zijn de beweringen:

A: "Mensen spreken de taal van het vakantieland niet."

B: "Mensen komen in de problemen."

- a Schrijf de implicatie $A \Rightarrow B$ als een zin.
- b Maak bij deze implicatie een waarheidstabel.
- c Zoek met een waarheidstabel uit of $\neg B \Rightarrow \neg A$ een ontkenning is van $A \Rightarrow B$.

Opgave 20

Gegeven is de bewering K : “Vierhoek $ABCD$ is een ruit.”

Formuleer beweringen A , B en C die aan de volgende voorwaarden voldoen.

A is een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor K .

B is een voldoende, maar geen nodige voorwaarde voor K .

C is een nodige en voldoende voorwaarde voor K .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
