

1.2 Waarheid

Inleiding

In de vorig paragraaf ging het om logische problemen op te lossen door het uiteen te zetten in redeneerstappen of gewoon je gevoel te gebruiken. In deze paragraaf ga je wat dieper in op de structuur van redeneren.

Je maakt kennis met verbindingstekens tussen beweringen (proposities) en je leert gebruik maken van waarheidstabellen. Dit is het eerste begin van de zogenaamde propositielogica.

Je leert in dit onderwerp

- een redenering opsplitsen in beweringen met verbindingstekens voor 'en', 'of' en 'niet', bijpassende venndiagrammen;
- het werken met waarheidstabellen, onder andere om logische gelijkwaardigheid aan te tonen.

Voorkennis

- de begrippen: (logische) redenering, conclusie, uitgangspunt, definitie, redeneerstap, correct en volledig, bewijs;
- conclusies trekken uit een aantal uitgangspunten.

Verkennen

Opgave V1

Een oude boerenwijsheid is:

“Als je de muren in een huis lichtblauw verft, dan heb je geen last van vliegen”.

Dit bleek in de Achterhoek echt te werken. Op sommige boerderijen stikte het van de vliegen. Om de vliegen niet binnenshuis te hebben maakte men de binnenmuren lichtblauw.

- Voor de constructie “Als ..., dan ...” wordt wel het teken $\Rightarrow$ (daaruit volgt) gebruikt. Hoe zou je deze redenering noteren met behulp van dit teken?
- Schrijf in eigen woorden het omgekeerde van deze redenering op.
- Uitgaande van het feit dat de boerenwijsheid waar is, is de omgekeerde redenering dan ook waar?
- De boerenwijsheid valt ook te ontkennen. Formuleer deze ontkenning.
- Is deze ontkenning, wederom uitgaande van de waarheid van de boerenwijsheid, waar?

Uitleg 1

Wat voor weer is het vandaag? Het regent.

De uitspraak “Het regent” is een bewering. Deze bewering noem je P .

P : “Het regent.”

Een bewering (of propositie) zoals P is altijd waar of onwaar.

Bij elke bewering hoort een ontkenning:

niet- P =: “Het regent niet.”

Je noteert niet- P als $\neg P$.

Elke bewering heeft een waarheidswaarde 0 of 1.

- Als een bewering waar is, dan heeft die waarheidswaarde 1.
- Is een bewering onwaar, dan is de waarheidswaarde 0.

Je kunt die waarheidswaarden weergeven in een waarheidstabel.

Als bewering P waar is (“Het regent.”) dan is de ontkenning (“Het regent niet.”) uiteraard niet waar. In een waarheidstabel worden alle mogelijkheden ondergebracht.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Tabel 1

De waarheidstabel is verder uit te breiden met dubbele ontkenningen $\neg\neg P$.

Merk op dat de beweringen P en $\neg\neg P$ dezelfde waarden in de waarheidstabel hebben. Zulke beweringen noem je logisch gelijkwaardig.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
0	1	0
1	0	1

Tabel 2

Opgave 1

Zijn de volgende uitspraken beweringen? Geef aan of de bewering waar of onwaar is.

- a "Blauw is geen kleur."
- b "Willem-Alexander trad in 2010 aan als koning van Nederland."
- c "Er zijn alleen oneven priemgetallen."
- d "Pak de hagelslag even voor mij."
- e "Is er een leuke film op de televisie vanavond?"
- f "17 is een priemgetal."

Opgave 2

- a Vul de waarheidstabel in.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
1		
0		

Tabel 3

- b Welke conclusies kun je trekken uit de ingevulde waarden in bovenstaande waarheidstabel?

Opgave 3

Haal uit het krantenbericht vier beweringen.

De ex-neuroloog Ernst Jansen Steur is veroordeeld tot een onvoorwaardelijke gevangenisstraf van drie jaar. Nog nooit ging een Nederlandse arts de cel in voor een medische misser. Voorwaardelijke straffen waren er wel.

De kindercardioloog Paul H. uit Utrecht werd in 2004 veroordeeld tot anderhalf jaar voorwaardelijke gevangenisstraf. Hij werd schuldig bevonden aan de dood van een baby, omdat hij "grovelijk onvoorzichtig" een dotterbehandeling had uitgevoerd. De strafmaat werd hoger, omdat hij in bezit was van een grote hoeveelheid kinderporno.

Een 54-jarige basisarts uit Heemstede kreeg in juni 2013 een jaar voorwaardelijk met een proeftijd van vijf jaar, omdat hij een borstkankerpatiënte behandelde met acupunctuur en 'korreltjes'. "Roekeloos en nalatig", oordeelde de rechter. De patiënte (52) is overleden.

De geneesheer-directeur en een verpleegkundige van een Utrechtse abortuskliniek werden in 2006 veroordeeld tot enkele maanden voorwaardelijk, omdat ze twee patiënten een veel te hoge dosis verdovingsmiddel hadden gegeven. Een patiënt overleed, de ander liep trombose op.

De rechtbank in Arnhem achtte in 1998 een Utrechtse arts schuldig aan de dood van een 71-jarige patiënt in het Rijnstate-ziekenhuis in Arnhem. Hij kreeg een boete van 10 duizend gulden. Het OM had zes maanden voorwaardelijk geëist. De arts had de man, die met een klaplong was opgenomen, een twintig keer te hoge dosis verdovingsmiddel gegeven.

Het Arnhemse gerechtshof veroordeelde in 1996 een 54-jarige Arnhemse huisarts tot 2 maanden voorwaardelijk wegens dood door schuld en een boete van 5.000 gulden. Het hof achtte hem schuldig aan de dood van een jonge vrouw, die tweemaal een dagdosis methadon had ingenomen. De arts greep niet in, maar ging ervan uit dat in de methadon een braakmiddel zat. Dat bleek niet het geval. Het OM deed drie jaar strafrechtelijk onderzoek naar "medische missers" van een maagchirurg van het Scheper Ziekenhuis in Emmen. Zeventien patiënten deden aangifte tegen hem. Niet is gebleken dat de chirurg "noodzakelijkerwijs onzorgvuldig" heeft gehandeld, liet het OM een vrouw weten die haar man op de operatietafel verloor.

bron: Volkskrant, 11 februari 2014

Uitleg 2

De uitspraak "Peter is atleet en filmliefhebber" kun je zien als een samenstelling van twee beweringen. Deze uitspraak is op te splitsen in twee eenvoudige beweringen:

- A: "Peter is een atleet."
- B: "Peter is een filmliefhebber."

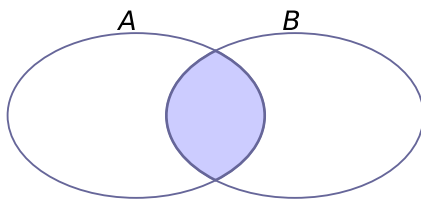
Bekijk de waarheidstabel.

Een bewering is altijd waar of onwaar, voor de samenstelling ligt dit iets genuanceerder.

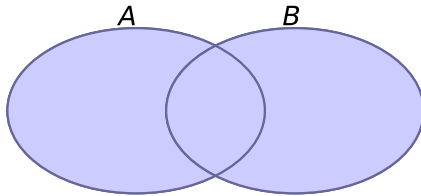
A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Tabel 4

Om te bepalen of een samengestelde bewering waar of onwaar is, kun je een venndiagram gebruiken. Bekijk de twee venndiagrammen met de verzamelingen: A : alle atleten en B : alle film liefhebbers.



I: $A \wedge B$



II: $A \vee B$

Figuur 1

- In figuur I zijn alle mensen aangegeven die zowel atleet als film liefhebber zijn. Hier geldt: A en B zijn waar.
Voor het woord 'en' wordt ook wel het symbool $\wedge$ gebruikt.
 $A \wedge B$ heet de conjunctie van A en B , $\wedge$ is het conjunctieteken.
- In figuur II zijn alle mensen aangegeven die atleet of film liefhebber zijn, of allebei. Hier geldt: A 'en/of' B is waar. Dit wordt disjunctie genoemd.
 A en/of B schrijf je als $A \vee B$, $\vee$ is het disjunctieteken.

Hierbij horen deze twee waarheidstabellen.

A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Tabel 5

A en B ($A \wedge B$) zijn alleen waar als zowel bewering A als bewering B waar is.

A en/of B ($A \vee B$) is waar als A en/of B waar is.

LET OP: Met het teken $\vee$ wordt altijd 'en/of' bedoeld. Soms moet je uit de context halen of 'en/of' wordt bedoeld, of 'of/of'.

Opgave 4

Splits de uitspraken in twee enkelvoudige beweringen P en Q . Verbind P en Q met het juiste teken: $\wedge$ of $\vee$.

- 'Peter is goed in aardrijkskunde en muziek.'
- 'Nadja leert goed geschiedenis terwijl ze naar K3 luistert.'
- 'Siebe krijgt een snoepje als hij zijn kamer opruimt of zijn broertje helpt met het konijnenhok schoonmaken.'
- 'John komt alleen vergaderen als Johan of Frits aanwezig zijn.'

Opgave 5

- a Gegeven zijn de beweringen P en Q .

P : "Peter is een atleet."

Q : "Peter is een filmliefhebber."

Formuleer de ontkenningen van de beweringen P en Q .

- b Vul de waarheidstabel in.

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$

Tabel 6

- c Vul de waarheidstabel in.

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$

Tabel 7

Opgave 6

Gegeven is de uitspraak.

"Je mag het concert van Anouk bezoeken als je een kaartje hebt en een identiteitskaart bij je hebt."

- Verdeel deze uitspraak in twee beweringen.
- Maak een bijbehorende waarheidstabel.
- Formuleer de ontkenning van beide beweringen.
- Maak ook een waarheidstabel die bij $\neg P \wedge \neg Q$ past.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **bewering** (of propositie) is altijd waar of onwaar.

Aan een bewering die waar is, wordt **waarheidswaarde 1** gegeven, een bewering die onwaar is krijgt waarheidswaarde 0.

Bij elke bewering P hoort ook de **ontkenning** van deze bewering: $\neg P$ (spreek uit als niet- P). Een ander woord voor ontkenning is ook wel **negatie** en $\neg$ is het negatieteken.

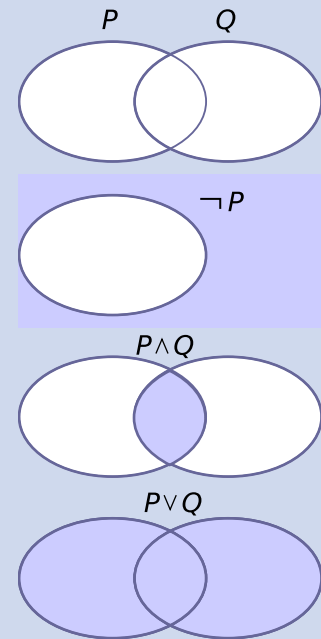
Met twee beweringen P en Q kun je nieuwe beweringen samenstellen:

- P en Q , te noteren als $P \wedge Q$, is de **conjunctie** van P en Q .
- P en/of Q , te noteren als $P \vee Q$, is de **disjunctie** van P en Q .

Opgelet! Hiermee wordt 'en/of' bedoeld, tenzij er iets anders vermeld wordt. Soms moet je uit de context halen of 'en/of' wordt bedoeld, of 'of/of'.

Om te bepalen of een samengestelde bewering waar of onwaar is, kun je een **venndiagram** gebruiken.

Een **waarheidstabel** geeft een overzicht van de waarheidswaarden van (samengestelde) beweringen.



Figuur 2

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0

Tabel 8

Twee (samengestelde) beweringen heten **logisch gelijkwaardig** als de kolommen in de waarheidstabel identiek zijn.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de volgende beweringen.

- "0 is het kleinste natuurlijke getal."
- "Een dolfijn behoort tot de zoogdieren."
- "De grafiek van $f(x) = x^2 + 1$ is een dalparabool."
- "39 is een priemgetal."

Wat is de waarheidswaarde van de bewering? Formuleer de ontkenning van de bewering en de waarheidswaarde hiervan.

Antwoord

"0 is het kleinste natuurlijke getal."

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: "0 is niet het kleinste natuurlijke getal", waarheidswaarde 0.

Je kunt de ontkenning (of negatie) ook noteren als $\neg$ ("0 is het kleinste natuurlijke getal"), waarin $\neg$ het negatieteken is.

“Een dolfijn behoort tot de zoogdieren.”

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: “een dolfijn behoort niet tot de zoogdieren”, waarheidswaarde 0.

“De grafiek van $f(x) = x^2 + 1$ is een dalparabool.”

- waarheidswaarde 1;
- ontkenning: “de grafiek $f(x)$ is geen dalparabool”, waarheidswaarde 0.

“39 is een priemgetal.”

- waarheidswaarde 0;
- ontkenning: “39 is geen priemgetal”, waarheidswaarde 1.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Leg uit welk verband er is tussen de waarheidswaarde van een bewering en haar ontkenning.
- Waarom is de ontkenning van de tweede bewering niet “een aap behoort tot de zoogdieren”?
- Formuleer zelf een bewering en haar ontkenning.

Opgave 8

De bewering “Deze zin bevat zes woorden” is onwaar.

Maar de ontkenning hiervan “Deze zin bevat geen zes woorden” is ook onwaar.

Hoe kan dit?

Voorbeeld 2

Gegeven is de zin “Apen houden ervan in bomen te klimmen en ze houden van bananen.”

Verdeel deze zin in twee beweringen en maak er een venndiagram en een waarheidstabel bij.

Antwoord

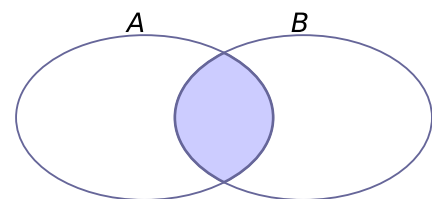
A: “Apen houden ervan in bomen te klimmen.”

B: “Apen houden van bananen.”

Waarheidstabel en venndiagram:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 9



Figuur 3

Opgave 9

Gegeven is de uitspraak:

“De doodsoorzaak is een misdrijf of een noodlottig ongeval.”

- Verdeel deze uitspraak in twee beweringen.
- Formuleer de ontkenning van beide beweringen.
- Maak ook een waarheidstabel die bij $\neg P \vee \neg Q$ past.

Opgave 10

Gegevens zijn de twee beweringen:

A: "Apen houden ervan in bomen te klimmen."

B: "Apen houden van bananen."

- a Maak een venndiagram en een waarheidstabel bij de uitspraak "Apen houden ervan in bomen te klimmen of ze houden van bananen".
- b Formuleer ontkenningen van de beweringen A en B.
- c Formuleer $\neg A \wedge B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- d Formuleer $A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- e Formuleer $\neg A \wedge \neg B$ en maak er een venndiagram en een waarheidstabel bij.

Opgave 11

Gegeven is de uitspraak: "De berg Chungawat is gevaarlijk en hoog."

- a Verdeel deze zin in twee beweringen A en B.
- b Maak een waarheidstabel bij deze uitspraak.
- c Formuleer ontkenningen van de beweringen A en B.
- d Formuleer $\neg A \wedge B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- e Formuleer $A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.
- f Formuleer $\neg A \wedge \neg B$ en maak er een waarheidstabel bij.

Voorbeeld 3

Uitspraak: "Ik sport op dinsdag of op donderdag."

De uitspraak is samengesteld uit twee beweringen:

P: "Ik sport op dinsdag."

Q: "Ik sport op donderdag."

Is $P \vee \neg Q$ logisch gelijkwaardig aan $\neg P \vee Q$?

Antwoord

Om logische gelijkwaardigheid aan te tonen, maak je een waarheidstabel.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0

Tabel 10

De waarheidswaarden in de vijfde en zesde kolom zijn niet gelijk. Hieruit volgt dat de uitdrukkingen niet logisch gelijkwaardig zijn.

Opgave 12

Bekijk de waarheidstabel.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$
0		1	0		1
0	0		1	0	
	1	0			0
1	0	0	1	1	

Tabel 11

- a Vul de waarheidstabel verder in.
- b Is de uitdrukking $P \wedge \neg Q$ gelijkwaardig met $\neg P \wedge Q$? Laat dit zien met een voorbeeld.

Verwerken

Opgave 13

Bekijk de volgende als..., dan... redenering:

“Als Tessa een voldoende haalt voor wiskunde, dan trakteert ze op taart.”

Formuleer de omkering van deze bewering. Welke waarheidswaarde heeft die omkering? Waarom?

Opgave 14

Ga na of de zinnen beweringen zijn.

- a “Waar staat de sinaasappelsap?”
- b “Een Ferrari is een dure auto.”
- c “Kamperen is in de zomer een goede manier om te ontspannen.”
- d “Op de middelbare school kies je uit vier soorten wiskunde.”
- e “Dwergkonijnen zijn kleiner dan gewone konijnen.”
- f “Er is een grootste priemgetal.”

Opgave 15

Ontleed de samengestelde zinnen in enkelvoudige beweringen P en Q .

Verbind daarna P en Q door de symbolen voor ‘en’, ‘en/of’, ‘niet’.

- a “Ik wil ham en kaas op mijn brood.”
- b “Ik wil brood met kaas en zonder boter.”
- c “Ik wil jam of pindakaas op mijn brood.”
- d “Ik wil hagelslag of pindakaas met hagelslag op mijn brood.”

Opgave 16

Gegeven zijn drie beweringen over getal x .

P : “ x is een geheel getal.”

Q : “ x is een even getal.”

R : “ x is een kwadraat.”

Maak een zin en een venndiagram bij ieder van de samengestelde beweringen.

- a $P \wedge Q$
- b $P \wedge R$
- c $P \wedge (Q \vee R)$
- d $\neg Q \wedge \neg R$

Opgave 17

Vul de waarheidstabel verder in.

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$
1	1		
0	1		
1	0	1	0
	0		

Tabel 12

Opgave 18

De uitspraak $2 < \pi < 5$ bevat het woord 'en'. De uitspraak kan geschreven worden als $P \wedge Q$.

- Benoem de beweringen P en Q .
- Wat weet je van π als geldt $(2 < \pi) \vee (\pi < 5)$?
- Maak een bewering bij $P \vee \neg Q$ en bij $\neg P \vee Q$.
- Zijn $P \vee \neg Q$ en $\neg P \vee Q$ logisch gelijkwaardig? Gebruik een waarheidstabel.

Toepassen**Opgave 19: Rokers en niet-rokers**

Een veelgemaakte redenering is de volgende: "90% van de longkankerpatiënten heeft gerookt." Dus "als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%."

Laat met een venndiagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan. Kies hiervoor twee groepen: patiënten en rokers. De mensen in de doorsnede van deze groepen zijn de rokende patiënten.

(naar: voorbeeldexamen syllabus vwo C)

Testen**Opgave 20**

Ga na of de zinnen beweringen zijn.

- "De appel is rood."
- "Een Ferrari rijdt sneller dan een Fiat."
- "Hoe was je vakantie?"
- "Van de zon word je blij."
- "Op de middelbare school kies je uit vier profielen."
- "Er is een grootste kwadraat."

Opgave 21

De uitspraak $1 < \varphi < 2$ bevat het woord 'en'.

De uitspraak kan geschreven worden als $P \wedge Q$.

- Benoem de beweringen P en Q .
- Wat weet je van φ als geldt $(1 < \varphi) \vee (\varphi < 2)$?
- Maak een zin bij $P \wedge \neg Q$ en $\neg P \wedge Q$.
- Zijn $P \wedge \neg Q$ en $\neg P \wedge Q$ logisch gelijkwaardig? Gebruik een waarheidstabel.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
