

4.5 Normaal of niet?

Inleiding

Als je de gewichten van zo'n 1000 aselekt gekozen vrouwen uit de leeftijdsgroep van 20– < 30 jaar meet, krijg je ongeveer een klokvormige frequentieverdeling. Maar mag je nu zeggen dat er sprake is van een normale kansverdeling?

Er bestaat normaal-waarschijnlijkheidspapier. Op dat papier wordt een cumulatief relatief frequentiepolygoon een rechte lijn als er van een normale kansverdeling sprake is. Met behulp van de vuistregels kun je vanaf dat papier dan het gemiddelde en de standaardafwijking aflezen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- normaal-waarschijnlijkheidspapier gebruiken om te bepalen of een frequentieverdeling normaal verdeeld is;
- gemiddelde en standaardafwijking van een normaal verdeelde kansvariabele aflezen van normaal-waarschijnlijkheidspapier.

Voorkennis

- werken met normale kansverdelingen;
- kansen berekenen bij normale kansverdelingen;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- een cumulatief frequentiepolygoon maken bij een frequentietabel of histogram.

Verkennen

Opgave V1

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale kansverdeling. Kun je nu zonder meer een normale kansverdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?

- a Ga na of deze frequentieverdeling voldoet aan de vuistregels voor een normale verdeling.
- b Is het voldoen aan de vuistregels voldoende reden om te concluderen dat een normale verdeling een bruikbaar rekenmodel is?

Tijdens het onderzoek wordt ook de gewichten van vrouwen uit andere leeftijdsklassen verzameld.

De ene leeftijdsklasse kent net wat hogere gewichten dan de andere: bij de ene is b.v. gewichtsklasse 35– < 40 leeg en zijn de twee extra klassen 105– < 110 en 110– < 115 benodigd.

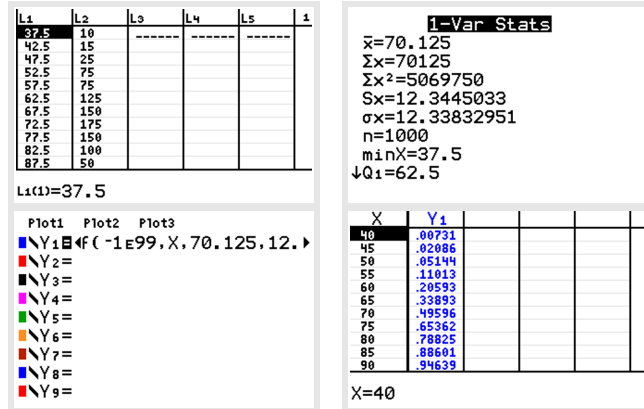
- c Vanwege ergonomische redenen willen de onderzoekers per leeftijdsklasse weten hoeveel standaardafwijkingen een gewicht van 78,5 kg afluigt van het gemiddelde gewicht in die leeftijdsklasse. Hoe kunnen ze dat voor elkaar krijgen?

gewicht	frequentie
35-<40	10
40-<45	15
45-<50	25
50-<55	75
55-<60	75
60-<65	125
65-<70	150
70-<75	175
75-<80	150
80-<85	100
85-<90	50
90-<95	25
95-<100	15
100-<105	10

Figuur 2

Uitleg

Bij een landelijk onderzoek zijn de gewichten bepaald van 1000 aselekt gekozen volwassen vrouwen van 20– < 30 jaar, zie tabel. De frequentieverdeling lijkt op die van een normale verdeling met $\mu(L) = 70,125$ en $\sigma(L) = 12,338$. Kun je nu zonder meer een normale verdeling als rekenmodel gebruiken voor deze groep vrouwen?



Figuur 3

Figuur 4

Zet je op **normaal waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm

$P(L \leq 40 | \mu = 70,125 \text{ en } \sigma = 12,338)$ uit, dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale verdeling wordt op normaal waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn.

Maak je van de gegeven frequentieverdeling een cumulatieve relatieve frequentieverdeling en zet je die uit op normaal waarschijnlijkheidspapier, dan zou je een rechte lijn moeten krijgen (je zet de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de rechter klassengrenzen). Je zult zien, dat de cumulatieve relatieve frequentieverdeling en de normale verdeling goed overeenkomen! Kennelijk zijn deze gewichten ongeveer normaal verdeeld!

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Neem (print) een aantal bladen normaal waarschijnlijkheidspapier. Ga uit van een normale verdeling met $\mu = 70,125$ en $\sigma = 12,338$.

- Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de waarden van $P(L \leq g)$ bij deze normale verdeling voor $g = 40, 45, 50, \dots, 105$. Denk er om dat alle kansen als percentages moeten worden gegeven.
- Wordt je grafiek een rechte lijn?
- Waar in je figuur vind je μ terug? Kun je ook σ terugvinden?

Opgave 2

Neem nu de tabel met de werkelijke gewichten van de 1000 vrouwen.

- Maak hierbij een tabel met cumulatieve relatieve frequenties.
- Zet deze cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de bovengrenzen van elke klasse op het normaal waarschijnlijkheidspapier waar de normale verdeling van de vorige opgave op staat.
- Verschild je grafiek veel van de grafiek van de normale verdeling? Waarom moet je de bovengrenzen van de klassen gebruiken?
- Kun je concluderen dat de gewichten van deze 1000 vrouwen normaal zijn verdeeld?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Zet je bij een normaal verdeelde kansvariabele X met verwachting $\mu(X)$ en standaardafwijking $\sigma(X)$ op **normaal-waarschijnlijkheidspapier** kansen van de vorm $P(X \leq g)$ uit tegen g , dan krijg je een rechte lijn. Elke zuivere cumulatieve normale kansverdeling wordt op normaal-waarschijnlijkheidspapier een rechte lijn. Zet daarbij de cumulatieve relatieve frequenties uit tegen de **bovengrenzen** van de klassen.

Vaak liggen op het normaal-waarschijnlijkheidspapier de punten van de cumulatieve relatieve frequentieverdeling niet precies op een rechte lijn. Trek dan een rechte lijn die zo goed mogelijk bij de getekende punten past. Je benadert op die manier de frequentieverdeling door de normale kansverdeling die bij die lijn hoort.

Schat de verwachtingswaarde door af te lezen welk getal er bij 50% hoort.

Omdat één van de twee vuistregels zegt dat bij een normale verdeling 68% in het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligt, is bij 84% de waarde van $\mu + \sigma$ af te lezen. Bepaal zo σ .

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met de diameters (millimeter) van machinaal geproduceerde moeren. Ga na dat deze diameters normaal zijn verdeeld en bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.

Antwoord

De grafische rekenmachine geeft $\bar{M} \approx 13,20$ en $\sigma(M) \approx 0,10$ waarin M de diameter van een moer voorstelt.

Op normaal-waarschijnlijkheidspapier verschillen de cumulatieve relatieve frequentieverdeling vanuit de tabel en de cumulatieve normale kansverdeling met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$ vrijwel niet van elkaar. Maak beide op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier.

Conclusie: M is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13,20$ en $\sigma(M) = 0,10$.



diameter	percentage
12,8-<12,9	0,1
12,9-<13,0	2,1
13,0-<13,1	13,6
13,1-<13,2	34,1
13,2-<13,3	34,0
13,3-<13,4	13,6
13,4-<13,5	2,0
13,5-<13,6	0,1

Figuur 5

Opgave 3

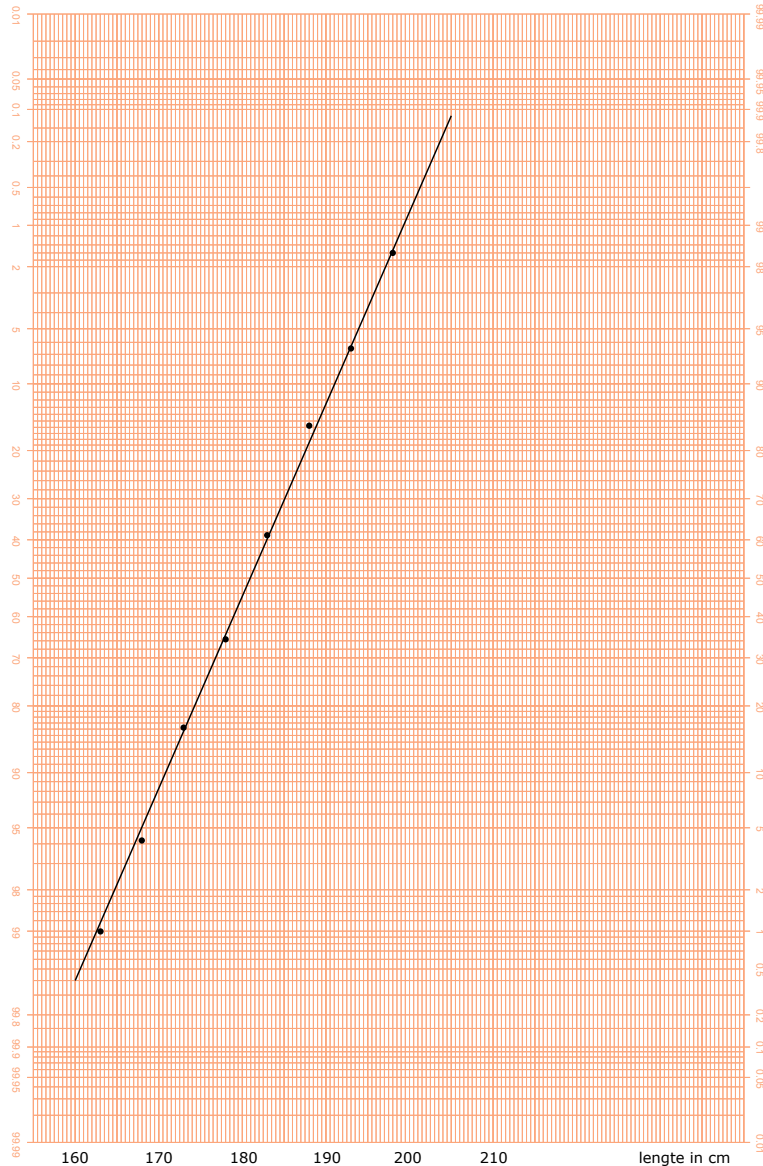
Bekijk de tabel met diameters van machinaal geproduceerde moeren in **Voorbeeld 1**.

- Reken het gemiddelde en de standaardafwijking na.
- Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve normale verdeling bij dit gemiddelde en deze standaardafwijking.
- Teken op hetzelfde papier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling van de moeren.
- Ga na dat de verdelingen van b en c redelijk goed overeenkomen.

Voorbeeld 2

De lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar is bij benadering klokvormig. In deze figuur op normaal waarschijnlijkheidspapier zie je hoe deze kansverdeling wordt benaderd door een rechte lijn.

Bepaal vanuit de figuur het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte X van de Nederlandse man in centimeter.



Figuur 6

Antwoord

Op de lengteverdeling van Nederlandse mannen boven de twintig jaar zijn de lengtes bij 50% en 84% af te lezen:

- bij 50% zit de gemiddelde lengte van $\mu \approx 181$ cm.
- bij 84% zit volgens de vuistregels $\mu + \sigma \approx 189$ cm.

Dit geeft een gemiddelde van ongeveer 181 cm met een standaardafwijking van $189 - 181 = 8$ cm.

Opgave 4

Wanneer een cumulatieve relatieve frequentieverdeling op normaal-waarschijnlijkheidspapier vrijwel een rechte lijn oplevert, is er sprake van een normale kansverdeling. In **Voorbeeld 2** zie je hoe je dan het gemiddelde en de standaardafwijking van de kansverdeling uit de figuur afleest.

Ga na dat de in het voorbeeld vermelde waarden inderdaad correct zijn.

Opgave 5

In een fabriek worden kilopakken suiker machinaal gevuld. Volgens de Europese norm mag niet meer dan 2,5% van de pakken suiker minder dan 1000 gram bevatten. Gebruik het bestand **De vulgewichten van honderd pakken suiker**.

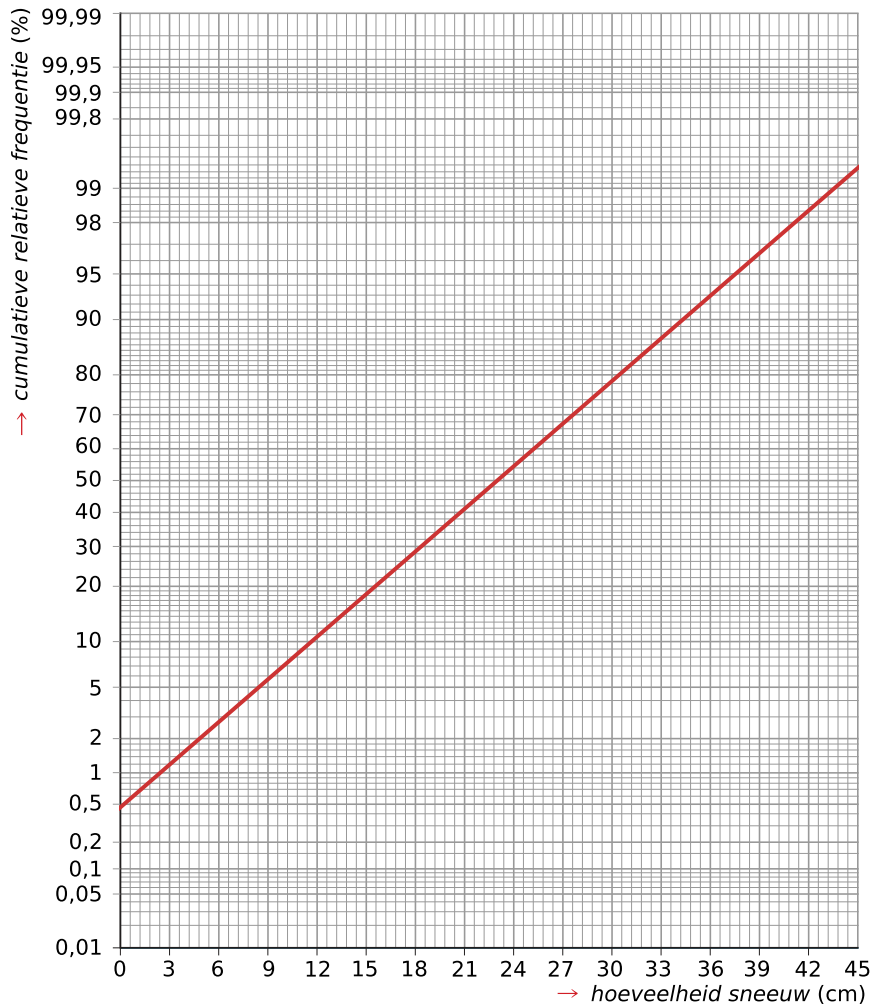
- a Maak een tabel met cumulatieve relatieve frequenties van deze vulgewichten. Gebruik klassen met een klassenbreedte van 1 gram.
- b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze vulgewichten in één decimaal.
- c Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- d Zijn de vulgewichten (bij goede benadering) normaal verdeeld? Zo ja, trek dan de rechte lijn die hoort bij deze normale verdeling.
- e Laat zien dat het gemiddelde vulgewicht en de bijbehorende standaardafwijking die je uit de figuur afleest, overeenkomen met de berekende waarden.
- f Welke vulgewichten hebben de 10% zwaarste pakken suiker? Lees je antwoord uit de figuur af.

Verwerken

Opgave 6

In een noordelijk gelegen stad sneeuwt het in het winterseizoen regelmatig.

Van de hoeveelheid sneeuw die afgelopen winter per dag dat het sneeuwde viel, is een grafiek op normaal-waarschijnlijkheidspapier gemaakt.



Figuur 7

- Leg uit hoe je uit deze grafiek kunt aflezen hoeveel procent van de dagen dat het sneeuwde er meer dan 18 centimeter sneeuw per dag viel.
- Leg uit waarom de hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel normaal verdeeld is en bepaal de gemiddelde hoeveelheid sneeuw die per sneeuwdag viel. Bepaal ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 7

Bekijk de tabel met de bloeddruk in mm Hg (millimeter kwikdruk) van een groep mannen en een groep vrouwen.

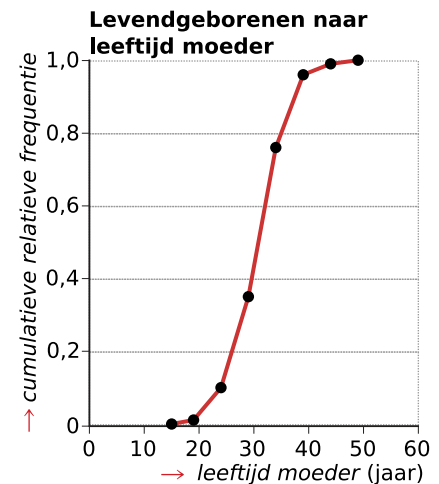
- Bereken van beide groepen de gemiddelde bloeddruk en de standaardafwijking van de bloeddruk.
- Welke klassenindeling is hier gehanteerd?
- Laat met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier zien dat de bloeddruk van de mannen niet normaal is verdeeld.
- Trek een rechte lijn die de verdeling zo goed mogelijk benadert. Doe dat en lees het gemiddelde en de standaardafwijking af die bij die lijn passen. Wijken de waarden veel af van de berekende waarden?
- Is de bloeddruk van de vrouwen wel normaal verdeeld?

Bloeddruk 150 personen in mm Hg		
	mannen	vrouwen
bloeddruk	frequentie	frequentie
105	2	1
110	4	3
115	6	5
120	16	15
125	15	12
130	6	6
135	7	7
140	7	7
145	7	8
150	2	5
155	1	3
160	1	2
165	1	1
	75	75

Figuur 8

Opgave 8

Bekijk de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon en de bijbehorende tabel van het aantal levendgeborenen vergeleken met de leeftijd van de moeder.



Figuur 9

klasse	abs. freq.	rel. freq.	cum. rel. freq.
15 – 19 jaar	2182	0,011246	0,011246
20 – 24 jaar	17383	0,089595	0,100842
25 – 29 jaar	49344	0,254328	0,35517
30 – 34 jaar	79001	0,407186	0,762356
35 – 39 jaar	39665	0,204441	0,966797
40 – 44 jaar	6225	0,032085	0,998882
45 – 49 jaar	217	0,001118	1
totaal	194017	1	

Tabel 1

Leg uit hoe je aan deze gegevens kunt zien of deze verdeling normaal verdeeld is. Zo ja, bepaal dan het gemiddelde en de standaardafwijking.

Opgave 9

Marieke moet zowel een taaltoets als een rekentoets maken om voor haar vervolgstudie in aanmerking te komen. Bij de taaltoets haalt ze 62 punten en voor de rekentoets haalt ze 70 punten. De scores voor de taaltoets zijn normaal verdeeld met een gemiddelde score van 55 punten en een standaardafwijking van 8 punten. De scores voor de rekentoets zijn ook normaal verdeeld met een gemiddelde van 55 punten en een standaardafwijking van 14 punten.

Je ziet dat Marieke bovengemiddeld gescoord heeft. Welke toets heeft zij het beste gemaakt?

Beantwoord deze vraag op twee manieren:

1. met behulp van grafieken op een blad normaal-waarschijnlijkheidspapier;
2. op (een) andere, zelf te bedenken manier(-en).

Toepassen

Opgave 10: Vogels die voedsel zoeken

Vogels die hun voedsel in bomen en struiken zoeken, doen dat vaak bij voorkeur op een specifieke hoogte. Gedurende een winter zijn in een bos voedselzoekende vogels geobserveerd. In de tabel staat de verdeling over verschillende hoogtes van 400 waarnemingen bij pimpelmezen.

hoogte (meter)	< 1,5	1,5 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 10	10 – 15	> 15
aantal waarnemingen	24	26	51	72	122	92	13

Tabel 2

Toon met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier aan dat de waargenomen hoogtes bij benadering normaal verdeeld zijn. Lees uit de tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van deze verdeling zijn. Geef beide antwoorden in decimeter. Licht je werkwijze toe.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2002, eerste tijdvak)

Opgave 11: Tennisballenfabrikant

Een tennisballenfabrikant produceert drie typen tennisballen: Yellow, Silver en Gold. Van elk type is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld. De fabrikant geeft de diameter van een tennisbal op in inches.

De fabrikant heeft bij 400 tennisballen van het type Yellow de diameters laten opmeten. Bekijk het resultaat in de tabel.

diameter (inch)	< 2,4	2,4 – < 2,5	2,5 – < 2,6	2,6 – < 2,7	2,7 – < 2,8	≥ 2,8
aantal waarnemingen	1	4	98	232	63	2

Tabel 3

- Zet de gegevens uit op normaal-waarschijnlijkheidspapier en toon daarmee aan dat de waargenomen diameters van Yellow inderdaad bij benadering normaal verdeeld zijn.
- Uit de tekening die je bij a hebt gemaakt kun je aflezen hoe groot het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow is. Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van de diameter van een bal van het type Yellow. Licht je antwoord toe.

Bij officiële wedstrijden mag een tennisbal niet te groot en ook niet te klein zijn. In de spelregels staat daarover het volgende: 'Bij alle proeven ter bepaling van de omvang moet een omvangmeter gebruikt worden. De omvangmeter bestaat uit een metalen plaat. In de plaat zitten twee cirkelvormige openingen met een diameter van respectievelijk 2,575 inch en 2,700 inch. De bal mag niet door zijn eigen gewicht door de kleine opening vallen, maar moet wel door zijn eigen gewicht door de grootste opening vallen.'

Van het type Gold is de diameter (bij benadering) normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,620 inch en een standaardafwijking van 0,048 inch.

De tennisballenfabrikant krijgt de opdracht 1200 tennisballen van het type Gold te leveren die gebruikt kunnen worden bij officiële wedstrijden.

- c Bereken hoeveel tennisballen de fabrikant naar verwachting moet produceren om aan deze opdracht te voldoen.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 12

Hier zie je een tabel met kniehoogtes in cm van 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

- a Bereken de gemiddelde kniehoogte en de standaarddeviatie.
- b Teken op normaal-waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdeling.
- c Ga na, dat de gemiddelde kniehoogte en de standaardafwijking die je uit de figuur kunt aflezen overeenkomen met de berekende waarden.
- d Zijn de kniehoogtes bij benadering normaal verdeeld?
- e 60% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a ? Lees je antwoord uit de figuur af.
- f Welke minimale lengte hebben de 15% grootste kniehoogtes? Lees je antwoord uit de figuur af.

Statistisch onderzoek 1947			
De Bijenkorf - Amsterdam			
5001 vrouwen met leeftijd > 18 jr.			
mouw- lengte	frequentie	knie- hoogte	frequentie
49	3	34	1
50	11	35	3
51	22	36	19
52	53	37	34
53	89	38	76
54	163	39	178
55	250	40	313
56	405	41	495
57	519	42	632
58	660	43	738
59	578	44	675
60	653	45	665
61	560	46	466
62	421	47	343
63	260	48	195
64	159	49	88
65	106	50	45
66	52	51	18
67	18	52	12
68	15	53	2
69	3	54	3
70	0		5001
71	1		
	5001		

Figuur 10

Practicum

Hier vind je een **leeg blad normaal-waarschijnlijkheidspapier** in drie kleuren.

- **normaal waarschijnlijkheidspapier (paars)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (oranje)**
- **normaal waarschijnlijkheidspapier (grijs)**



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
