

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- toenemende, afnemende of constante stijging of daling — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamediagram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde
- veranderingssnelheid in een punt — differentiaalquotiënt — raaklijn
- hellingsgrafiek — hellingsfunctie — tekenschema

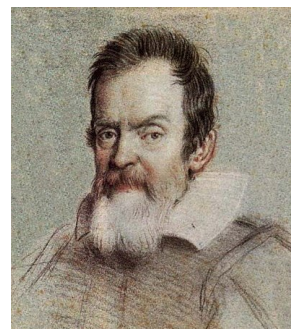
Activiteitenlijst

- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt;
- bij een functie (of grafiek) een toenamediagram tekenen en omgekeerd bij een toenamediagram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;
- bij een functie (of grafiek) het differentiaalquotiënt voor een gegeven invoerwaarde berekenen en de betekenis ervan omschrijven — het hellingsgetal van een raaklijn aan een grafiek berekenen;
- bij een functie (of grafiek) een hellingsgrafiek tekenen — uit een hellingsgrafiek eigenschappen van de functie (stijgen, dalen, extremen) aflezen.

Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323–1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte **Galileo Galileï (1564–1642)** de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven. En **Isaac Newton (1642–1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'.



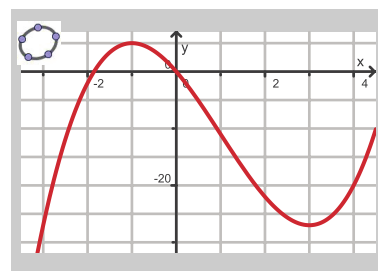
Figuur 1 Galileo Galileï (Wikipedia)

Testen

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, gemaakt met GeoGebra.

- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-3, 1]$.
- Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.
- Stel de vergelijking op van de raaklijn aan f voor $x = 1$.
- Maak de hellingsgrafiek bij deze functie.
- Uit de hellingsgrafiek kun je de x -waarden van de extremen van de gegeven functie halen. Leg uit hoe en bereken de extremen van f .



Figuur 2

Opgave 2

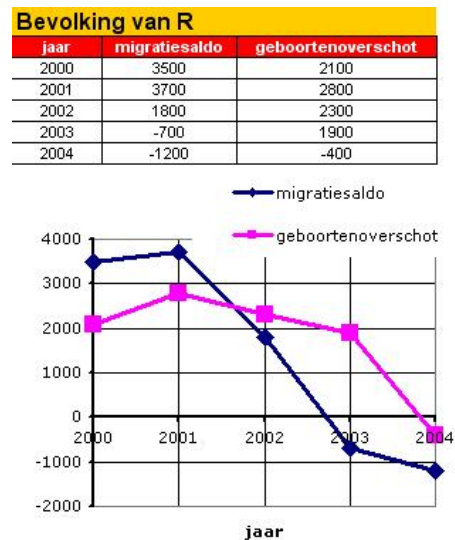
De hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet, wordt gegeven door $h(t) = 60t - 5t^2$, waarin h de hoogte boven de begane grond in meter en t de tijd in seconden na het afschieten.

- Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?
- Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.
- Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.
- Bereken de snelheid van de vuurpijl op $t = 4$.
- Plot de grafiek van de snelheid $h'(t)$ van de vuurpijl. Maak eerst een tabel met hellingsgetallen.
- De grafiek van de snelheid die je bij e hebt getekend moet een rechte lijn zijn. Stel bij die rechte lijn een formule op en bereken met die formule de snelheid op het moment van ontploffen.

Opgave 3

Het migratiesaldo van R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in R komt wonen, en het aantal mensen dat uit R vertrekt. Het geboorteovershot is het verschil tussen het aantal geboorten en het aantal overledenen in R. In deze grafiek zie je het migratiesaldo en het geboorteovershot voor de jaren 2000 tot en met 2004.

- Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in R in het jaar 2000 toegenomen?
- In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?
- Het aantal inwoners van R was aan het begin van het jaar 2000 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in R in de jaren 2000 tot en met 2004.
- Hoe groot was het aantal inwoners op 1 januari 2005?

**Figuur 3****Opgave 4**

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

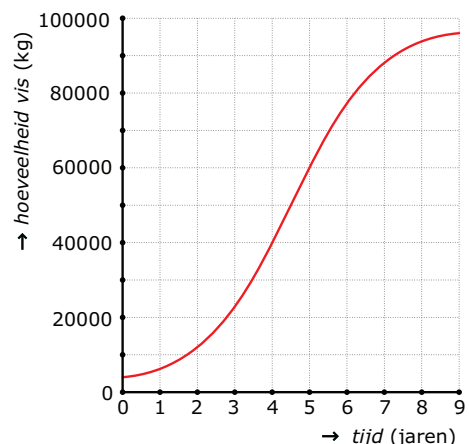
- Teken het toenamediagram met stapgrootte 1.
- De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.

Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten.
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

(bron: examen wiskunde A vwo in 1989, eerste tijdvak)

**Figuur 4**

Toepassen

Opgave 5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbeperkt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.

Een mogelijk verband tussen de opbrengst R (in honderden euro) en het aantal werknemers w wordt gegeven door de formule $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$.

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer $R(3) - R(2)$. De meeropbrengst per werknemer heet in econometaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

- Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?
- Je kunt met de grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.
- De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

Opgave 6: Daglengte

Door het KNMI worden de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang gedurende het jaar bijgehouden. Via internet kun je actuele informatie over dit onderwerp vinden. [Hier](#) zie je een tabel en een grafiek voor Amsterdam in een bepaald jaar gemaakt in MS-Excel.

Je ziet dat de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang in de loop van het jaar veranderen. Bovendien is de snelheid waarmee die veranderingen plaatsvinden ook veranderlijk. In de tweede helft van de maand juni bijvoorbeeld verandert het tijdstip van zonsondergang maar weinig per dag. Maar in september is die verandering per dag juist behoorlijk groot. Ook de daglengte (verschil tussen zonsopkomst en zonsondergang) verandert in de loop van het jaar. En ook die verandering gaat soms sneller en soms minder snel...

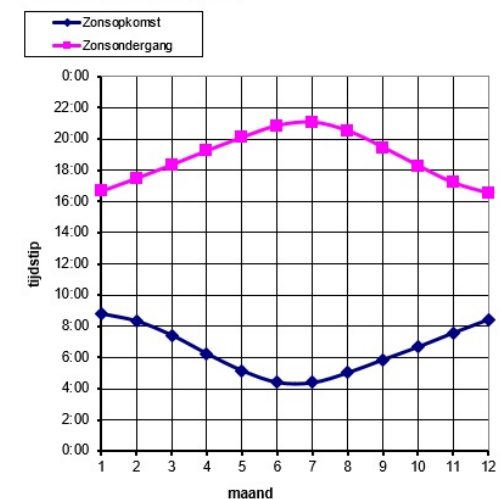
Een goede manier om de veranderingen nauwkeurig te bekijken is een toenamediagram bijvoorbeeld per maand.

- Het tijdstip van zonsopkomst verandert per dag. In welke maanden verandert het tijdstip van zonsopkomst het snelst per dag? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Ook het tijdstip van zonsondergang verandert per dag. Verandert het tijdstip van zonsondergang het snelst per dag in dezelfde maanden als dat van zonsopkomst? Kun je dit verklaren?
- De daglengte-grafiek is af te leiden uit die van zonsopkomst en zonsondergang. Hoe?
- In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder?
- Teken zelf in Excel een grafiek en een toenamediagram van de daglengte in de loop van het jaar. Neem de gegevens over. Neem voor het toenamediagram een stapgrootte van 1 maand.

Zonsopkomst en zonsondergang in Nederland

De tijdstippen gelden steeds voor de eerste dag van de maand
Alle tijden zijn in M.E.T. (geen zomertijd dus)

maand	opkomst	ondergang
1	8:48	16:39
2	8:20	17:28
3	7:26	18:20
4	6:15	19:14
5	5:10	20:05
6	4:25	20:50
7	4:24	21:03
8	5:02	20:30
9	5:52	19:27
10	6:41	18:17
11	7:35	17:12
12	8:26	16:32



Figuur 5

- f De daglengte verandert dagelijks. In welke maanden verandert de daglengte het snelst? Hoe zie je dat aan de grafiek en hoe aan het toenamediagram?
- g In bepaalde maanden lijkt de daglengte wel vrijwel constant. In welke maanden is dat het geval? En hoe zie je dat aan het toenamediagram?
- h In welke periode van het jaar wordt de daglengte in toenemende mate minder? Hoe zie je dat aan het toenamediagram?

Opgave 7: Snelheid, versnelling

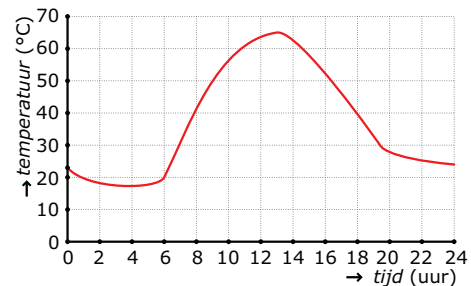
Voor de snelheid v in m/s van een bewegend voorwerp geldt: $v = 2,4t$ waarin t de tijd in seconden is.

- a De grafiek van v is de hellingsgrafiek van de grafiek van de afgelegde weg $s(t)$ waarin s in meters is uitgedrukt. Neem aan, dat $s(0) = 0$. Maak een zo nauwkeurig mogelijke grafiek van $s(t)$.
- b Bij de grafiek van $v(t)$ hoort ook een hellingsgrafiek. Teken die hellingsgrafiek.
- c Wat stelt de hellingsgrafiek van $v(t)$ voor?
- d Voor de afgelegde weg geldt de formule $s(t) = 1,2t^2$.
Laat met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t, t + h]$ zien, dat de gegeven functie v inderdaad de hellingfunctie van s is.

Examen

Opgave 8: Woestijnhagedis

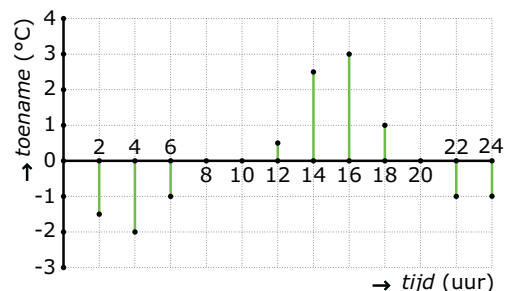
De woestijnhagedis (*diposaurus dorsalis*) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur. Je ziet in de figuur het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.



Figuur 6

- a Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe.
- b In de figuur is te zien, dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Hoeveel bedraagt in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?

In dit diagram zie je de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Ook deze figuur is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig is om deze temperaturen te meten, kun je in het diagram slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.



Figuur 7

- c Teken een grafiek van de temperatuur in het hol van de hagedis uitgaande van het toename-/afnamediagram.
- d Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de binnenkant van het hol en de omgeving het grootst is.

(bron: examen wiskunde A havo 1996, tweede tijdvak, aangepast)

Opgave 9: Schoon drinkwater

Overall op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

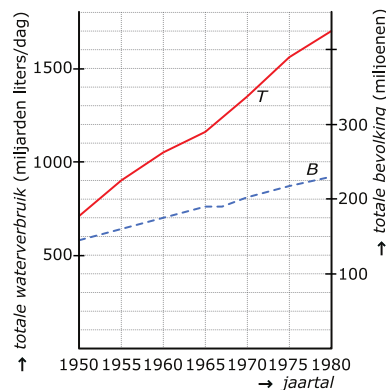
In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik (T) en de grootte van de bevolking (B) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.

- a Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

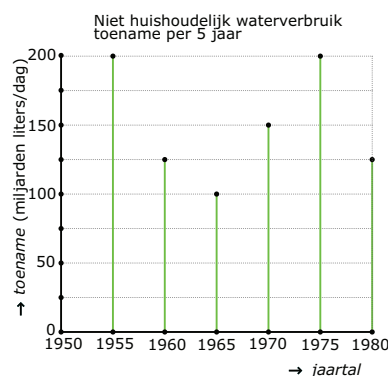
Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

- b Bekijk ook het toename-diagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik. Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.
- c Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)



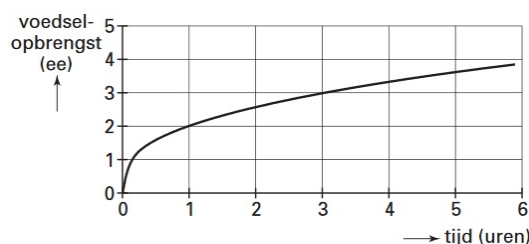
Figuur 8



Figuur 9

Opgave 10: Roofdieren

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden. In dat model geeft de opbrengstfunctie het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen. In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort A. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.



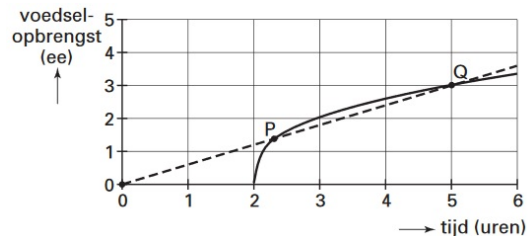
Figuur 10

We bekijken een roofdier van soort A. Na 0,5 uur heeft dit roofdier een bepaalde hoeveelheid energie aan voedsel gevangen. Om de dubbele hoeveelheid te vangen is meer dan het dubbele van 0,5 uur nodig.

- a Bepaal met behulp van de grafiek hoeveel maal zo groot de daarvoor benodigde tijd is.

Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordt daardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan. Dit heeft gevolgen voor de gemiddelde opbrengst per uur. In de figuur is de grafiek van de opbrengstfunctie van roofdiersoort B getekend. Zoals je in de figuur kunt zien, is een roofdier van deze soort twee uur onderweg (1 uur heen en 1 uur terug).

Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt Q met coördinaten $(5,3)$. Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B vijf uur jaagt (inclusief verplaatsing), dan is zijn voedselopbrengst 3 ee. De gemiddelde voedselopbrengst is dan $\frac{3}{5} = 0,6$ ee/h. In de figuur is ook een stippellijn getekend die gaat door de oorsprong en punt Q . Deze stippellijn snijdt de grafiek van roofdiersoort B ook in punt P .



Figuur 11

- b** Leg uit, zonder berekening, dat de gemiddelde voedselopbrengst die hoort bij punt P ook gelijk is aan $0,6$ ee/uur.
- c** Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich een punt waarbij de gemiddelde opbrengst per uur voor een roofdier van soort B maximaal is.

Bepaal met behulp van de figuur bij **b**, bij welke tijd de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is. Licht je antwoord toe.

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is t de tijd in uren en r de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie r heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van r , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van r .

- d** Schets de grafiek van de afgeleide van r en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

(bron: vwo wiskunde A examen 2006, eerste tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
