

7.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Toepassen van formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- variabelen — breuken — machten en wortels
- formules combineren, onder andere door substitueren — haakjes wegwerken
- vergelijking — ongelijkheid
- recht evenredig (met een macht) — omgekeerd evenredig — dubbellogaritmisch papier
- lineair verband — exponentieel verband — logaritme, logaritmische schaal — lineair interpoleren en extrapoleren
- periodiek verband, periode, evenwichtswaarde, amplitude en frequentie — verandering in een punt

Activiteitenlijst

- rekenen met variabelen — rekenen met breuken — rekenen met machten en wortels
- formules combineren, onder andere door substitueren — haakjes wegwerken
- vergelijkingen en ongelijkheden (grafisch) oplossen
- recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en de karakteristieken van hun grafieken benoemen en gebruiken — werken met dubbellogaritmisch papier
- lineaire evenredige en exponentiële verbanden herkennen en de karakteristieken van hun grafieken benoemen en gebruiken — werken met enkellogaritmisch papier
- karakteristieken van allerlei verbanden benoemen en gebruiken — werken met veranderingen, hellingswaarde, maximum, minimum bepalen met de grafische rekenmachine — periodiciteit herkennen, periode, evenwichtswaarde en amplitude aflezen

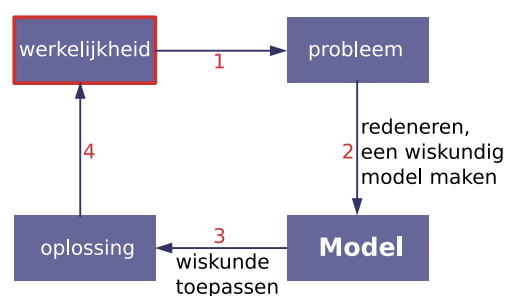
Achtergronden

Tegenwoordig heeft in veel vakgebieden de wiskunde zijn intrede gedaan. Vaak gaat het dan om het opstellen van een **wiskundig model** aan de hand waarvan voorspellingen gedaan kunnen worden. Zo'n model bestaat uit variabelen en bijbehorende formules.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model heet **modelleren**.

Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 4(6x^3)^2 \cdot \frac{4}{x^{18}}$ en $g(x) = \sqrt{1000x}$.

- Schrijf $f(x)$ in de vorm: $f(x) = ax^n$.
- Los op: $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

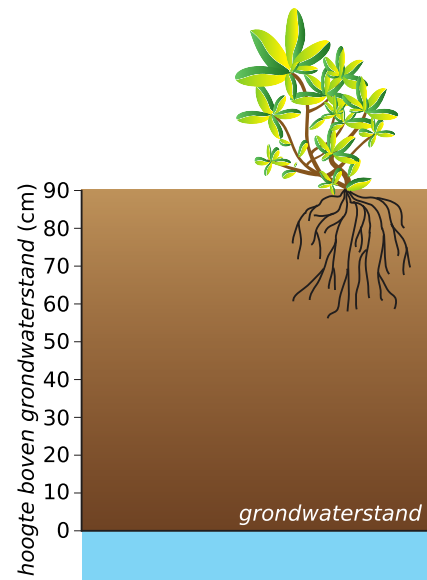
Opgave 2

In een natuurgebied staat het grondwater op een diepte van 90 centimeter.

Op een hoogte van 10 centimeter boven de grondwaterstand is het vochtgehalte van de grond ongeveer 32%. Hoe groter de hoogte boven de grondwaterstand, hoe kleiner het vochtgehalte van de grond wordt. Zo is op een hoogte van 80 centimeter boven de grondwaterstand het vochtgehalte afgenomen tot 4%.

- Wat voor soort verband bestaat er tussen de hoogte boven de grondwaterstand H (cm) en het vochtgehalte p (%)? Stel een formule op met H uitgedrukt in p .
- Er wordt een beplanting aangebracht waarvan de wortels op hun maximale diepte een vochtgehalte tussen de 5% en 10% nodig hebben.
Bereken welke hoogtes boven de grondwaterstand in aanmerking komen.
- De formule uit a is bruikbaar voor $10 \leq H \leq 80$. Welke vochtpercentages horen daarbij?
- De grondwaterstand in het natuurgebied wordt 30 centimeter omhooggebracht. Het verband tussen de hoogte en het vochtgehalte blijft hetzelfde als in de oude situatie.
Bereken het nieuwe vochtgehalte van de grond op een diepte van 40 centimeter.

(naar: examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)



Figuur 2

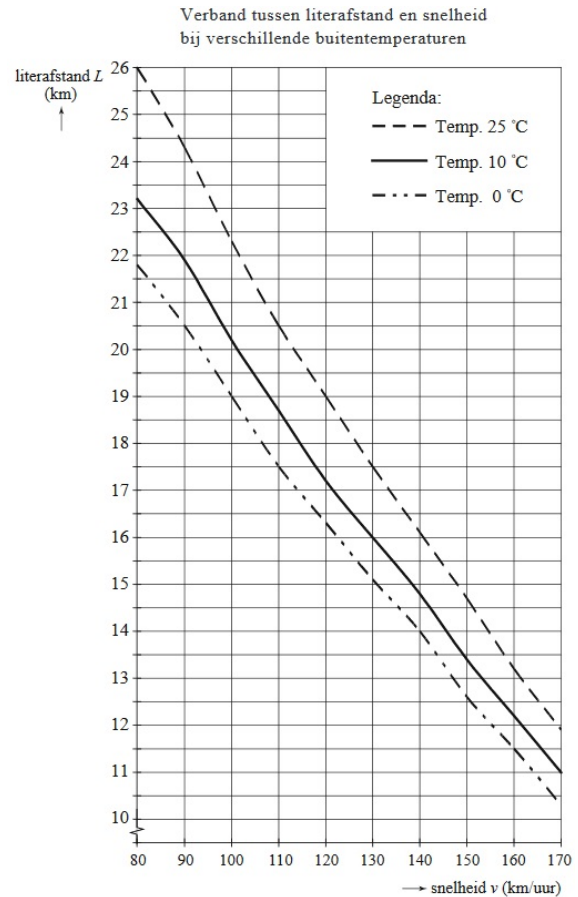
Opgave 3

Het benzineverbruik van een automotor is afhankelijk van verschillende factoren. Een van die factoren is de buitentemperatuur. Bekijk de figuur waarin voor een aantal verschillende buitentemperaturen de 'literafstand' L (km) is uitgezet tegen de 'snelheid' v (km/h). De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine kan worden gereden. Hoe groter de literafstand, des te lager het verbruik.

In de figuur is te zien dat bij een snelheid van 90 km/h en een temperatuur van 10 °C de literafstand 21,9 kilometer is, en dat deze bij 25 °C 24,3 kilometer is.

Bereken met lineair interpoleren de literafstand bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, tweede tijdvak)



Figuur 3

Opgave 4

Voor het laten drukken van luxe folders moet een vast bedrag van € 25,00 en daar bovenop € 0,12 per folder betaald worden. De totale kosten per folder zijn hoog als er maar weinig afgedrukt moeten worden. De totale kosten per folder TKF (in euro) hangen af van het aantal folders a dat gedrukt moet worden.

- Stel een formule op voor de totale kosten per folder TKF .
- Waarom is TKF niet omgekeerd evenredig met a ?
- Teken de grafiek met TKF uitgedrukt in a op de grafische rekenmachine.
- Bereken met behulp van de formule bij welk aantal folders de drukkosten niet hoger zijn dan € 0,15 per folder.

Opgave 5

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een hardloophwedstrijd. Er is ruimte voor 2000 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	31	68	150	330	726	1598

Tabel 1

- Het aantal inschrijvingen in de tabel vormt rij u . Zoek uit of rij u bij benadering een rekenkundige of meetkundige rij is.
- Stel een recursieformule op bij rij u . Neem $n = 0$ om 00:00 uur en n het aantal uur na dit tijdstip.
- Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

- d Stel een directe formule op bij rij *u*. Is er sprake van een lineaire rij of een exponentiële rij?
- e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor de hardloopwedstrijd wordt gesloten als de groei op deze manier doorgaat.

Opgave 6

Bekijk de tabel waarin het verband wordt weergegeven tussen het hersengewicht *H* (gram) en het lichaamsgewicht *G* (gram) van enkele kleine zoogdieren.

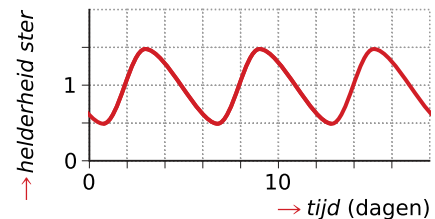
	wezel	muis	eekhoorn	egel	kat	haas
<i>G</i>	95	200	320	820	3600	4000
<i>H</i>	2,54	4,18	5,72	10,75	28,97	31,09

Tabel 2

- a Onderzoek met behulp van logaritmisch grafiekenpapier van welk soort verband er sprake is. Onderzoekers hebben een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen *G* en *H*. Deze formule is: $H = 0,12 \cdot G^{0,67}$.
- b Hoeveel bedraagt het lichaamsgewicht van een zoogdier met een hersengewicht van meer dan 150 gram?

Opgave 7

Een astronoom heeft gedurende een aantal dagen de helderheid van een ster gemeten. De resultaten zijn weergegeven in de grafiek. De helderheid is uitgedrukt in een getal tussen 0 en 1,5, waarbij 0 betekent dat de ster niet zichtbaar is en 1,5 betekent dat de ster zeer helder is. Er is duidelijk een periodiek verband zichtbaar tussen de tijd in dagen en de helderheid van de ster.



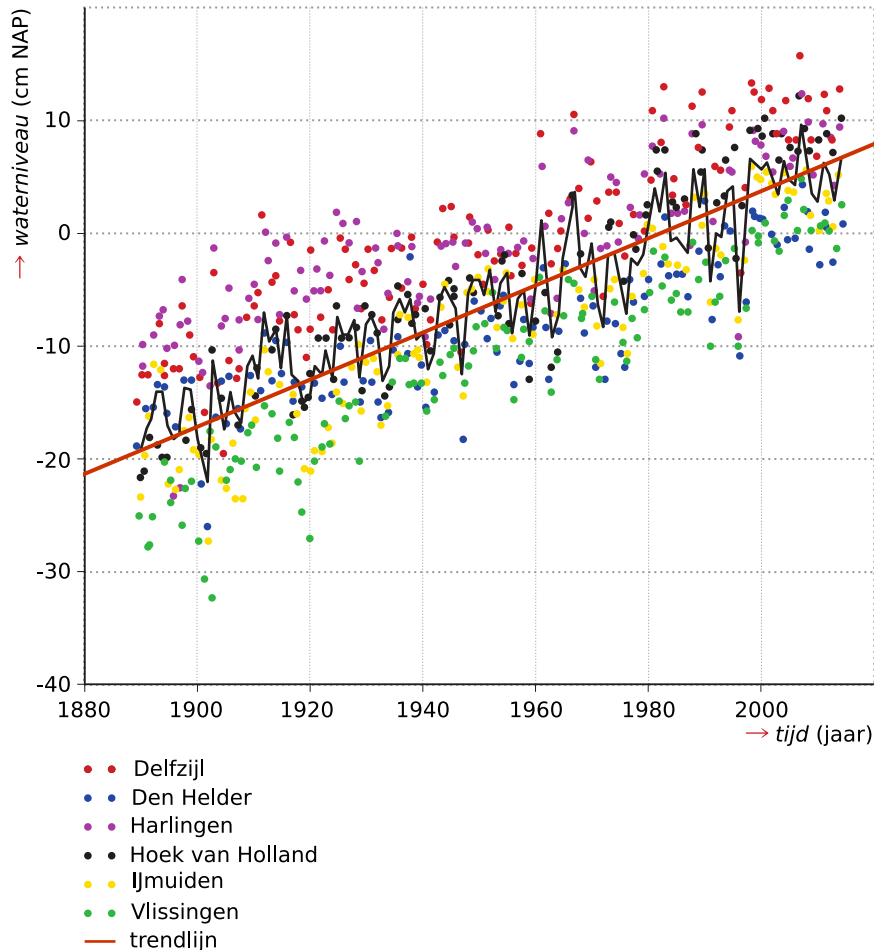
Figuur 4

- a Geef de periode.
- b Geef de evenwichtsstand.
- c Geef de amplitude.
- d De astronoom is 1 mei begonnen met het meten van de helderheid van de ster. De maand mei heeft 31 dagen. Wanneer is de helderheid van de ster in juni voor het eerst maximaal?
- e Hoe groot zal de helderheid van de ster ongeveer zijn op 15 juni?

Toepassen

Opgave 8: Stijgend waterniveau

Vanaf 1890 is op zes plaatsen in Nederland het waterniveau gemeten. De gemiddelde waarden per jaar per plaats zijn weergegeven in een grafiek. Ook is de grafieklijn getekend met het gemiddelde waterniveau van de zes plaatsen. Er is een duidelijke positieve trend te zien, de bijbehorende trendlijn is ook getekend.



Figuur 5

- Stel een formule op bij de trendlijn met t de tijd in jaar na 1890 en W het waterniveau (cm NAP).
- Ga ervan uit dat deze trend zich voortzet. In welk jaar zal het gemiddelde waterniveau dan voor het eerst boven 10 centimeter NAP uitkomen?

Examen

Opgave 9: Supersize Me

In de film 'Supersize Me' besluit de hoofdpersoon, Morgan Spurlock, dertig dagen lang uitsluitend fastfood te eten. Op deze manier krijgt hij elke dag 5000 kilocalorieën aan energie binnen. Eerst wordt Morgan, die aan het begin van het experiment 85 kilogram weegt, nog misselijk van het eten. In het vervolg van de film went hij aan het type voedsel en ten slotte gaat hij het zelfs lekker vinden.

Diëtisten kunnen gewichtstoename voorspellen met een rekenmodel. Voor actieve volwassen mannen, zoals Morgan, is er een formule om de energiebehoefte te bepalen om op gewicht te blijven:

$$E_b = 33,6 \cdot G$$

Hierin is E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën en G het gewicht in kilogram.

- Wat voor soort verband bestaat er tussen E_b en G ?

Veronderstel dat Morgan een dagelijkse energiebehoefte zou hebben van 5000 kilocalorieën om op gewicht te blijven. Dan zou hij volgens de formule veel meer wegen dan de 85 kilogram die hij aan het begin van het experiment woog.

- b** Bereken hoeveel kilogram hij dan meer zou wegen.

In het rekenmodel wordt verder gebruikgemaakt van het gegeven dat elke 7800 kilocalorieën te veel een gewichtstoename van 1 kilogram veroorzaakt.

- c** Bereken met behulp van de gegevens hoeveel gram Morgan al na één dag volgens het rekenmodel zwaarder wordt.

De gewichtstoename T van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt: $T = 0,000128 \cdot (5000 - E_b)$.

Hierin is T de gewichtstoename in kilogram per dag.

Wanneer deze formule wordt gecombineerd met de formule $E_b = 33,6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G .

Deze nieuwe formule is te herleiden tot de vorm: $T = a \cdot G + b$.

- d** Bereken a en b .

(naar: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 10: Snelheden

In september 2003 won de Keniaan Rono een hardloophwedstrijd over een afstand van 2000 meter. Hij liep deze afstand in 4 minuten en 57,76 seconden. Dat betekent dat Rono die afstand liep met een gemiddelde snelheid van ongeveer 24,18 km/h. Het is gebruikelijk om tijden als 4 minuten en 57,76 seconden te noteren als 4:57.76.

Met deze prestatie behaalde Rono geen wereldrecord. Dat stond op dat moment op naam van de Marokkaan El Guerrouj. Zijn recordtijd op de 2000 meter was 4:44.79.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid in km/h waarmee El Guerrouj dit wereldrecord liep. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Bekijk de tabel waarin de wereldrecords hardlopen bij de mannen tot en met september 2003 op een aantal afstanden zijn weergegeven.

afstand (meter)	tijd	gemiddelde snelheid (km/h)
100	9.78	36,8
200	19.32	37,3
400	43.18	33,3
800	1:41.11	28,5
1000	2:11.96	27,3
1500	3:26.00	26,2
2000	4:44.79	25,3
3000	7:20.67	24,5
5000	12:39.36	23,7
10000	26:22.75	22,7

Tabel 3

Uit de tabel blijkt bijvoorbeeld dat het wereldrecord op de 1000 meter 2:11.96 was. Afgerond op één decimaal was daarbij de gemiddelde snelheid 27,3 km/h.

Het verband tussen de afstanden en de gemiddelde snelheden uit de tabel kun je benaderen met de formule:

$$v = \frac{200 \cdot a}{44 \cdot a^2 + 1} - 0,07 \cdot a + 23$$

In deze formule is v de gemiddelde snelheid in km/h en a de afstand in kilometer.

- b** De gemiddelde snelheden volgens deze formule komen niet precies overeen met de uitkomsten uit de tabel.

Bereken voor de 3000 meter (dus voor $a = 3$) hoeveel de gemiddelde snelheid volgens de formule afwijkt van de uitkomst uit de tabel.

Met de formule kun je bij elke afstand boven de 100 meter de gemiddelde snelheid berekenen die hoort bij het denkbeeldig gelopen wereldrecord. Voor bijvoorbeeld een afstand van 2283 meter zou het wereldrecord met een gemiddelde snelheid van 24,82 km/h zijn gelopen.

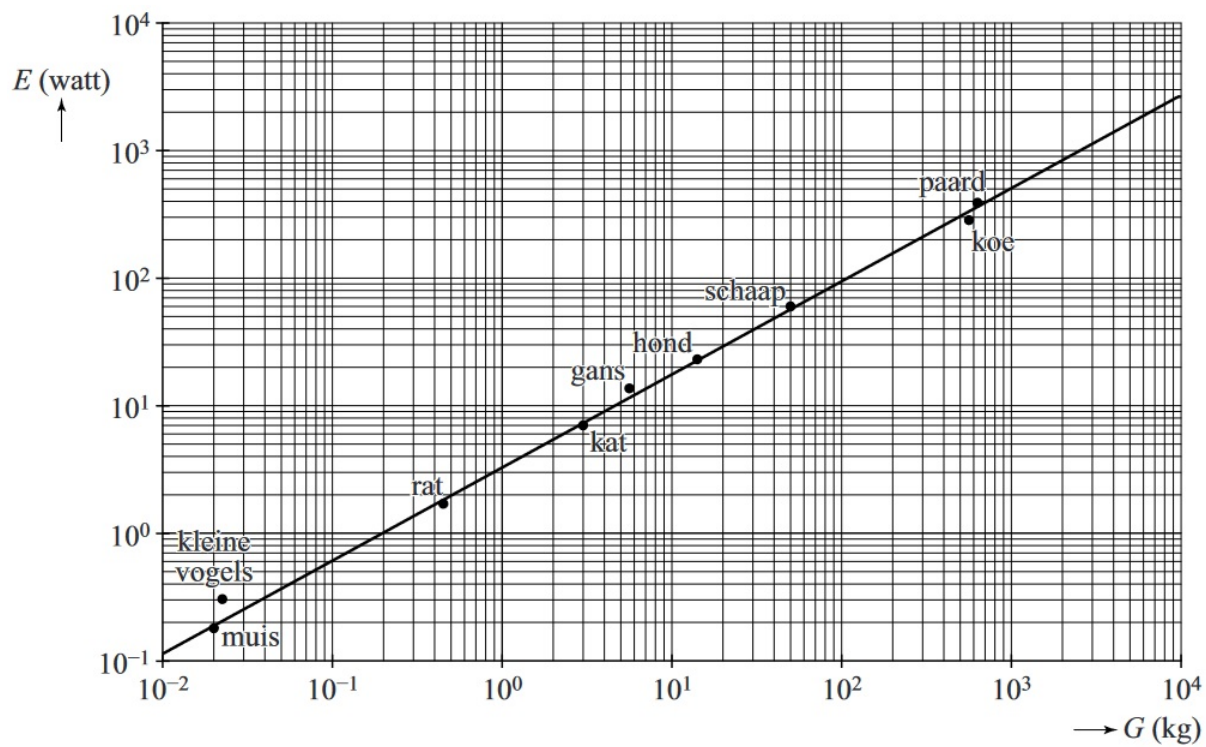
- c** Bereken op welke afstand het denkbeeldige wereldrecord een gemiddelde snelheid van precies 30 km/h op zou leveren.

In de tabel is de gemiddelde snelheid het hoogst bij de 200 meter. De formule van v is niet maximaal bij 200 meter, maar bij een afstand tussen 100 en 200 meter.

- d** Bereken afgerond op meter bij welke afstand de gemiddelde snelheid volgens de formule van v zo groot mogelijk is.

(naar: examen vwo wiskunde A1 in 2006, tweede tijdvak)

Uitwerkbijlage bij





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
