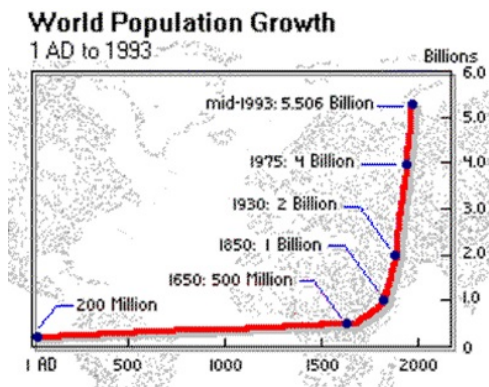


7.5 Lineair en exponentieel

Inleiding

Stadsbesturen willen graag weten hoe het zit met hun bevolking, neemt het aantal inwoners toe of neemt het af? En hoe neemt het aantal inwoners toe (af), lineair of exponentieel? Dergelijke kennis is van belang om beslissingen te nemen betreffende bijvoorbeeld huizenbouw.

Bekijk dit huiveringwekkende plaatje over de wereldbevolking maar eens...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire en exponentiële verbanden;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

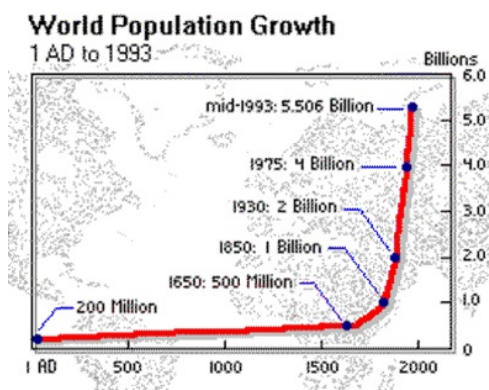
- lineaire verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- exponentiële verbanden met hun karakteristieke grafieken en formules;
- rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

Opgave V1

Vlak voor het jaar 2000 werd dit plaatje gemaakt om de groei van de wereldbevolking in kaart te brengen. Inmiddels is ergens in 2011 de 7 miljard overschreden.

- Tot welk jaar kun je spreken van lineaire groei? Stel een bijpassende formule op en voorspel daarmee het aantal mensen op Aarde in 2050.
- Neem aan dat na die tijd de groei exponentieel is geworden. Welke formule kun je daarbij opstellen? Voorspel ook daarmee het aantal mensen op aarde in 2050.
- Waarom kun je eigenlijk niet precies van exponentiële groei spreken?



Figuur 2

Uitleg 1

Vlak voor het jaar 2000 werd het plaatje in **Opgave V1** gemaakt om de groei van de wereldbevolking in kaart te brengen. Inmiddels is ergens in 2011 de 7 miljard overschreden.

Vanaf het jaar 1 tot het jaar 1650 lijkt de grafiek een rechte lijn.

Daarbij past de formule $N \approx 0,18t + 200$.

Hierin is t het aantal jaren na het jaar 0 en N het aantal miljoenen mensen.

Wanneer de groei ook na 1650 op die manier was doorgegaan, dan waren er in het jaar 2000 ongeveer 560 miljoen mensen op Aarde geweest. Dit heet lineair extrapoleren. Daarbij gebruik je twee punten van een grafiek en neem je aan dat de grafiek een rechte lijn is die je doortrekt naar 'de toekomst'.

Alleen liep het een beetje anders...

Neem aan dat de groei vanaf 1650 tot 1975 zuiver exponentieel was. Dat lijkt ook wel redelijk te passen bij de hele grafiek.

Dan past bij dat stuk van de grafiek de formule $N \approx 500 \cdot 1,006^{t-1650}$.

Hierbij is nog steeds $t = 0$ in het jaar 0 en N in miljoenen.

Nu is de voorspelling voor het jaar 2000 ongeveer 4058 miljoen.

Opgave 1

Bekijk de gegevens in **Uitleg 1**. Er is sprake van een lineair verband vanaf het jaar 0 tot het jaar 1650.

- Laat zien, hoe je aan de formule bij dit verband kunt komen.
- Voorspel door lineair extrapoleren het aantal mensen in 2000 en in 2050.
Het berekenen van tussenwaarden (in dit geval de aantal mensen in een jaartal tussen 0 en 1650) heet lineair interpoleren.
- Voorspel door lineair interpoleren het aantal mensen in het jaar 1000.

Opgave 2

Bekijk de gegevens in **Uitleg 1**. Er is sprake van een exponentieel verband vanaf het jaar 1650 tot het jaar 1975.

- Laat zien, hoe je aan de formule bij dit verband kunt komen.
- Voorspel met behulp van deze formule het aantal mensen in 2000 en in 2050.
In werkelijkheid is de groei nog sneller gegaan.
- Waaraan zie je dit?

Opgave 3

Gebruik opnieuw de gegevens uit **Uitleg 1**.

Om na te gaan of er van een exponentieel verband sprake is, wordt **enkellogaritmisch papier** gebruikt. Op dit soort papier is de horizontale as gewoon lineair, maar de verticale as kent een logaritmische schaal.

- Teken de punten in de gegeven grafiek op dit papier. Laat zien dat je door de punten niet precies een rechte lijn kunt trekken.
- Je kunt wel een lijn tekenen waar al deze punten redelijk bij in de buurt liggen. Welke formule hoort bij deze lijn?
- Voorspel met deze laatste formule het aantal mensen in 2000 en 2050.

Uitleg 2

Bij bevolkingsgroei verandert het aantal mensen voortdurend. Maar er zijn veel situaties met lineaire en exponentiële functies waarin alleen in vaste (tijd)stappen wordt gewerkt. Je spreekt dan niet van een functie, maar van een rij. En je kunt het verloop van zo'n rij op twee manieren beschrijven.

Bij een lineaire rij zoals $a : 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$:

- door recursie met recursieformule $a_n = a_{n-1} + 3$ en begingetal $a_0 = 5$.
- door een directe formule: $a_n = 3 \cdot n + 5$.

Bij een exponentiële rij zoals $b : 5, 15, 45, 135, 405, 1215, \dots$:

- door recursie met recursieformule $b_n = b_{n-1} \cdot 3$ en begingetal $b_0 = 5$.
- door een directe formule: $b_n = 5 \cdot 3^n$.

Je kunt overigens het nummer n in plaats van bij 0 ook bij 1 beginnen. Dat heeft gevolgen voor de directe formules.

Opgave 4

Bekijk de twee rijen in [Uitleg 2](#).

- Hoe zien de directe formules eruit als je begint bij $n = 1$ in plaats van $n = 0$?
- Als je de 100-ste term wilt berekenen, gebruik je dan liever de directe formule of de recursieformule?
- Bereken de 100-ste term bij beide rijen.

Opgave 5

Bekijk de rij getallen u : 1020, 1080, 1140, 1200, 1260, 1320, ...

- Welke regelmaat zit er in rij u ?
- Is rij u een rij met een lineair of een exponentieel verband?
- Stel een recursieformule op voor rij u .
Begin de nummering van de termen bij 0.
- Bereken u_7 met de recursieformule.
- Stel een directe formule op bij rij u .
- Bereken de honderdste term van rij u .

Opgave 6

Je hebt op 1 januari 2017 € 1200,00 op een spaarrekening gezet tegen 1,5% rente per jaar. De bank geeft je maandelijks een overzicht van het saldo van deze rekening en berekent ook maandelijks de rentebijbeschrijving afgerond op centen. Je neemt dat jaar geen geld op en stort ook niets bij.

- Hoeveel bedraagt het saldo op 1 februari 2017?
- S_n is het saldo na n maanden. Welke recursieformule geldt voor S_n ?
- Hoeveel bedraagt het saldo na 1 jaar, dus op 1 januari 2018?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Als er een **lineair verband** bestaat tussen y en x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = ax + b$, waarin:

- a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt is: de toe- of afname van y per toename van x met 1;
- b het begingetal is, de waarde van y bij het snijpunt met de y -as.

De grafiek bij een lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$.

Gaat een grafiek door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ en mag je uitgaan van een lineair verband, dan is:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Uitkomsten bij punten tussen A en B kun je schatten:

- lineair interpoleren** is het schatten van tussenliggende waarden, uitgaande van een lineaire toename of afname tussen A en B .
- lineair extrapoleren** is het schatten van waarden die niet tussen A en B liggen, uitgaande van een lineaire toename of afname tussen A en B .

Bij een **exponentieel verband** hoort een formule van de vorm:

$$y = b \cdot g^x, \text{ waarin:}$$

- g de groeifactor is: het getal waarmee de waarde van y wordt vermenigvuldigd als x met 1 toeneemt;
- b het begingetal is, de waarde van y bij het snijpunt met de y -as.

Gaat een grafiek door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ en mag je uitgaan van een exponentieel verband, dan is:

$$g = \left(\frac{y_B}{y_A}\right)^{\frac{1}{x_B - x_A}}$$

Als bij dergelijke verbanden x alleen de waarden $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ kan aannemen, dan spreek je van een **rij**. In plaats van x wordt dan meestal n gebruikt. Rijen kun je beschrijven door:

- een recursieformule zoals: $u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$ voor lineaire rijen en $u_n = u_{n-1} \cdot g$ met $u_0 = b$ voor exponentiële rijen;
- een directe formule zoals: $u_n = a \cdot n + b$ voor lineaire rijen en $u_n = b \cdot g^n$ voor exponentiële rijen.

Je kunt in plaats van met $n = 0$ ook met $n = 1$ beginnen. De formules moeten dan iets worden aangepast. Voor het rekenen met recursieformules bestaat op de grafische rekenmachine een speciale 'mode' of een speciaal 'menu'.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Van een bepaald verband gaat de grafiek door $A(1,3)$ en $B(5,4)$.

- Stel een bijpassende formule op als het verband lineair is.
- Stel een bijpassende formule op als het verband exponentieel is.

Antwoord

- Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x + b$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{5-1} = 0,25$$

In $y = 0,25x + b$ vul je nog de coördinaten van A (of B) in: $3 = 0,25 + b$ geeft $b = 2,75$.

Dus wordt de formule $y = 0,25x + 2,75$.

- Bij een exponentieel verband hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$.

$$g = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5-1}} \approx 1,075$$

In $y = b \cdot 1,075^x$ vul je nog de coördinaten van A (of B) in: $3 = b \cdot 1,075^1$ geeft $b \approx 2,79$.

Dus wordt de formule $y \approx 2,79 \cdot 1,075^x$.

Opgave 7

Een lineaire functie heeft een grafiek die door $P(10,200)$ en $Q(22,128)$ gaat.

- Stel een bijpassende formule op.
- Bereken door lineair interpoleren de y -waarde bij $x = 20$.
- Bereken door lineair extrapoleren de y -waarde bij $x = 30$.

Opgave 8

Een exponentiële functie heeft een grafiek die door $P(10,200)$ en $Q(22,128)$ gaat.

- Stel een bijpassende formule op.
- Bereken de y -waarde bij $x = 30$.

Opgave 9

In een bepaalde regio zijn de jaarlijkse kosten K_j voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 en de vaste kosten K_v , het vastrecht, € 70,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor de kosten van het verbruik K_j als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

- b** Welke formule geldt voor de totale kosten K als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?
- c** Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?
- d** Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- e** Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moet dit huishouden dat jaar betalen?
- f** Welke formule, die van K_j of die van K , geeft een recht evenredig verband en waarom?

Voorbeeld 2

Plutonium-238 wordt gebruikt als brandstof in kernreactoren. Het wordt ook toegepast als brandstof voor ruimtesondes, zoals de sonde New Horizons. Plutonium-238 heeft als eigenschap dat het 'vervalt', er verdwijnt steeds een beetje van de stof.

Bekijk de vervaltabel van plutonium-238.

tijd t (jaar)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
hoeveelheid H (μg)	1000	650	455	300	200	130	95	55	45

Tabel 1

Zet de gegevens uit de tabel uit op **enkellogaritmisch papier**. Stel een bij dit verval passende formule voor $H(t)$ op.

Antwoord

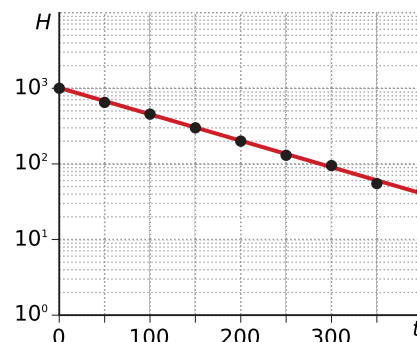
Voor de grafiek:

- $1000 = 10^3$: het eerste punt komt bij 10^3 .
- $650 = 6,5 \cdot 10^2$: het tweede punt komt tussen het vijfde en zesde streepje boven 10^2 .
- $455 = 4,55 \cdot 10^2$: het derde punt komt tussen het derde en vierde streepje boven 10^2 .
- Enzovoort.

De getekende punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Daarom mag je aannemen dat er tussen t en H een exponentieel verband van de vorm $H = b \cdot g^t$ bestaat. Je gaat dus uit van een exponentieel groeimodel.

De bijpassende formule is: $H = 1000 \cdot 0,992^t$.

Met deze formule kan bijvoorbeeld worden berekend hoeveel plutonium-238 er na 75 jaar nog over is en hoe groot de halveringstijd van plutonium-238 is.



Figuur 3

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- a** Leg uit waar je het laatste punt uit de tabel op enkellogaritmisch papier moet zetten.
- b** Bereken hoeveel plutonium-238 er na 75 jaar nog over is.
- c** Bereken de halveringstijd van plutonium-238.
- d** De VS en de Russische Federatie zijn onderling overeengekomen om elk 34 ton van hun overvloedig geworden kernwapenplutonium te vernietigen. Stel dat deze 34 ton allemaal plutonium-238 is en dat deze afspraak niet was gemaakt. Bereken hoelang het dan zou duren voordat er nog minder dan 5% van deze 68 ton plutonium-238 over is.

Opgave 11

Gegeven is een rechte lijn op enkellogaritmisch papier door de punten (3,54) en (5,486). Stel een bijpassende formule op.

Opgave 12

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.

Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste zalmen in de vijver zijn uitgezet en het aantal zalmen A dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$$A(t) = \frac{3500}{1+6 \cdot 0,8^t}$$

- Teken de grafiek bij deze formule op enkellogaritmisch papier.
- Wat voor soort groeimodel hoort bij het begin van de grafiek?
- Na hoeveel maanden zullen er voor het eerst meer dan 1500 zalmen zijn?
- Bereken met de grafische rekenmachine na hoeveel maanden de helling het steilst is. Hoeveel zalmen komen er die maand bij?
- Welke asymptoot heeft de grafiek? Wat is de praktische betekenis daarvan?

Voorbeeld 3

Bekijk de tabel en grafiek van het Centraal Bureau voor de Statistiek over het aantal daklozen in Nederland op 1 januari van elk jaar tussen 2009 en 2015.

Daklozen absoluut							
Perioden	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Persoonskenmerken x 1000							
totaal personen	17,8	23,3	24,4	27,3	24,8	26,9	31,0
geslacht: mannen	14,2	17,6	19,7	22,5	19,9	21,4	25,3
geslacht: vrouwen	3,6	5,7	4,7	4,8	4,8	5,5	5,7
leeftijd: 18 tot 30 jaar	4,0	6,1	6,4	6,4	7,2	6,8	8,3
leeftijd: 30 tot 50 jaar	10,1	12,7	13,2	15,0	12,8	14,3	16,4
leeftijd: 50 tot 65 jaar	3,7	4,6	4,7	5,9	4,7	5,8	6,2

Figuur 4

- Schat door middel van lineair interpoleren het aantal mannelijke daklozen op 1 april 2012.
- Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen met een leeftijd tussen de 30 en 50 jaar op 1 oktober 2016.

Antwoord

Ga uit van een lineair model.

- Op 1 januari 2012 waren er 22500 mannelijke daklozen en op 1 januari 2013 waren er 19900. In een jaar tijd is het aantal daklozen met $22500 - 19900 = 2600$ afgenomen.

Dat is een afname van $\frac{2600}{4} = 650$ per kwartaal.

Op 1 april is het eerste kwartaal net voorbij.

Op 1 april 2012 waren er naar schatting $22500 - 650 = 21850$ mannelijke daklozen.

- Op 1 januari 2014 waren er 14300 daklozen tussen de 30 en 50 jaar.

Op 1 januari 2015 waren er 16400.

In een jaar tijd is het aantal daklozen tussen de 30 en 50 jaar met $16400 - 14300 = 2100$ toegenomen.

Dat is een toename van $\frac{2100}{4} = 525$ per kwartaal.

Op 1 oktober is het derde kwartaal net voorbij.

Tussen 1 januari 2015 en 1 oktober 2016 zitten zeven kwartalen.

Op 1 oktober 2016 waren er naar schatting $16400 + 7 \cdot 525 = 20075$ daklozen van 30 tot 50 jaar.

Opgave 13

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

- Schat door middel van lineair interpoleren het aantal vrouwelijke daklozen op 1 april 2013.
- Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen tussen de 18 en 30 jaar op 1 oktober 2016.

Voorbeeld 4

Een bioloog houdt de populatiegroei van kikkers in een natuurgebied in de gaten. Als er te veel kikkers zijn, is er sprake van een plaag en moet er worden ingegrepen. Er wordt gesproken over een plaag wanneer het aantal kikkers meer dan 400.000 bedraagt.

Bekijk de tabel met meetgegevens van 1990 t/m 2015.

- De aantallen kikkers in de tabel vormen een exponentiële rij u .
- Stel een recursieformule op bij rij u . Neem $n = 0$ in 1990.
- Stel een directe formule op bij rij u .
- Bereken in welk jaar er een kikkerplaag zal zijn als de groei op deze manier doorgaat.

jaar	aantal kikkers ($\times 1000$)
1990	212
1995	230
2000	250
2005	272
2010	295
2015	320

Tabel 2

Antwoord

- De groeifactor is ongeveer $1,018 \approx 1,02$, dus de recursieformule is $u_n = u_{n-1} \cdot 1,02$ met $u_0 = 212$.
- $u_n = 212 \cdot 1,02^n$
- Los de vergelijking $212 \cdot 1,02^n = 400$ op.
Je vindt $n \approx 32$.
In 2022 zal er een kikkerplaag zijn.

Opgave 14

Bekijk **Voorbeeld 4**.

- Laat zien dat rij u (bij benadering) geen lineaire rij maar een exponentiële rij is.
- Bereken met de recursieformule het aantal kikkers in 1992.
- Laat zien hoe je met behulp van logaritmen de vergelijking $212 \cdot 1,02^n = 400$ oplost.

Opgave 15

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een congres. Er is ruimte voor 500 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	25	61	97	132	168	205

Tabel 3

- De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u .
Zoek uit of rij u (bij benadering) een rij met een lineair of een exponentieel verband is.
- Stel een recursieformule op bij rij u . Neem $n = 0$ om 00:00 uur.
- Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.
- Stel een directe formule op bij rij u . Is dit een lineaire of een exponentiële formule?
- Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor het congres wordt gesloten als de groei op deze manier doorgaat.

Verwerken

Opgave 16

Harm heeft een huis gekocht waar veel aan verbouwd moet worden. Hij is nog op zoek naar een loodgieter.

Loodgieter De Graaf rekent € 42,50 per uur inclusief voorrijkosten.

Loodgieter Willemsen rekent € 39,00 per uur exclusief voorrijkosten van € 20,00 per dag.

- Wat voor soort verband bestaat er tussen het aantal uur per dag a dat loodgieter De Graaf werkt en de kosten K (€) die hij in rekening brengt?
Stel hierbij een formule op.
- Wat voor soort verband bestaat er tussen het aantal uur per dag a dat loodgieter Willemsen werkt en de kosten K (€) die hij in rekening brengt?
Stel hierbij een formule op.
- Harm kan niet precies inschatten hoeveel tijd de klus zal kosten, maar hij verwacht dat de klus door de loodgieter binnen een werkdag geklaard zal zijn.
Vanaf hoeveel uur is het voor Harm voordeliger om loodgieter Willemsen in te huren?

Opgave 17

Bekijk de tabel met een overzicht van het aantal personenauto's in Nederland.

<i>tijd (jaar)</i>	1999	2005	2007	2008	2009	2010
<i>aantal personenauto's</i>	4100000	4300000	4350000	4410000	4500000	4660000

Tabel 4

- Bepaal door lineair interpoleren de aantallen personenauto's voor het jaar 2000 en het jaar 2006.
- Bepaal door lineair extrapoleren de aantallen voor 2014 en 2016.
- In 1990 telde Nederland 14,89 miljoen inwoners.
Hoeveel auto's waren er per Nederlander in 1990? Geef je antwoord in twee decimalen.
- Hoeveel Nederlanders waren er per auto in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 18

Onderzoekers zijn erachter gekomen dat bonobo's net als mensen vanaf ongeveer hun veertigste last krijgen van verziendheid. Aanleiding voor het onderzoek was de constatering dat oudere apen tijdens het vlooiën hun armen verder strekken en hun hoofd verder van hun vlooipartner vandaan houden dan jongere apen.

Bekijk de tabel met enkele meetgegevens. Hierin is A het aantal millimeter dat de apen hun hoofd van hun vlooipartner vandaan houden, de vlooi afstand, en t de leeftijd van de aap in jaar.

t (jaar)	40	42	44	46	48	50
A (millimeter)	29	42	61	89	131	192

Tabel 5

- Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier.
- Wat voor soort groeimodel hoort bij het verband tussen de leeftijd van een bonobo en de vlooi afstand? Hoe zie je dat aan de grafiek?
De onderzoekers hebben een formule opgesteld die het beste bij de punten in de grafiek past. Deze formule is: $A = 28,5 \cdot 1,21^t$.
Hierin is $t = 0$ bij een leeftijd van 40 jaar.
- Bereken vanaf welke leeftijd de vlooi afstand voor het eerst meer dan 250 millimeter is.

Opgave 19

Gegeven is de rij u_n waarin elke term 6 meer is dan de vorige term.

De vierde term in de rij is 55.

- Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.
- Bepaal u_8 .
- Stel de directe formule en de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.
Gegeven is de rij v_n waarin elke term 0,6 keer de vorige term is.
De vierde term in de rij is 55. Elke term wordt afgerond op een geheel getal.
- Stel de directe formule en de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

Opgave 20

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken ze overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar.

Volgens de faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

- In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.
Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's. In de tabel is het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007 weergegeven. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

<i>tijd (jaar)</i>	2005	2006	2007
<i>aangereden wilde zwijnen</i>	131	275	578

Tabel 6

Als je veronderstelt dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kun je een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaar en $t = 0$ in 2005.

- Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen worden aangereden.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2012, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 21: Aandeel

Bekijk deze grafiek uit een advertentie. Het gaat om de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933-2005. Je kunt in de grafiek bijvoorbeeld aflezen dat in 2000 de waarde van het aandeel Robeco gelijk was aan € 10.000.000,00.

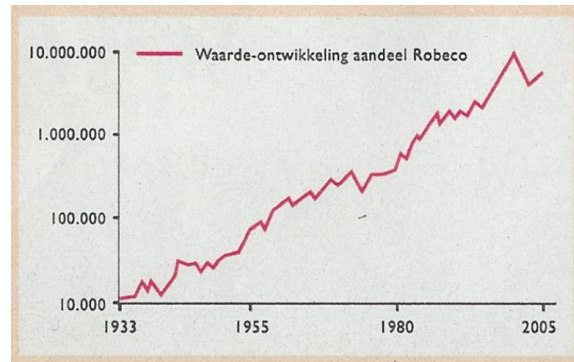
Let op de schaalverdeling langs de verticale as. Er geldt: in 1980 ligt de waarde tussen € 100.000,00 en € 1.000.000,00. Bij deze schaalverdeling kun je zo'n tussenliggende waarde vrij nauwkeurig bepalen.

- a Schrijf in maximaal vijf regels een uitleg waarin je demonstreert hoe je de waarde van het aandeel in 1980 bepaalt.

De waardeontwikkeling van het aandeel tussen 1933 en 2000 kan worden benaderd door een rechte lijn. Dit houdt in dat de waarde in deze periode (bijna) exponentieel groeide. Neem aan dat de waarde in 2000 precies € 10.000.000,00 was.

- b Bereken (uitgaande van de exponentiële groei) met hoeveel procent de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933-2000 per jaar groeide.
- c Bij exponentiële groei wordt vaak de verdubbelingstijd gebruikt. Met het antwoord op b kun je ook de verdubbelingstijd berekenen. Bereken de verdubbelingstijd. Heb je bij b geen antwoord, gebruik dan 9%.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde C in 2018)



Figuur 5

Opgave 22: Vierkanten

Een groot vierkant wordt onderverdeeld in 625 kleine vierkantjes (25 in de breedte en 25 in de lengte). In ieder vierkantje komt een getal te staan. Alle getallen van 0 tot en met 624 komen precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het magische getal. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal eruit.

Bekijk de figuur met een voorbeeld voor een vierkant van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

Het magische getal van het vierkant kun je berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Tabel 7

Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

- a Bereken met behulp van deze formule het magische getal van het vierkant met 625 kleine vierkantjes.

In het algemeen geldt voor een vierkant van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt de volgende formule voor het magische getal:

$$\text{magisch getal} = 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:

- Voor de som van alle getallen in het vierkant geldt de formule:
 $\text{som} = 0,5 \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$
- Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een vierkant van p bij p getallen).
- De eerste term is 0, de laatste term is $p^2 - 1$.

- Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het vierkant gedeeld door het aantal rijen.
- b** Laat zien hoe met behulp hiervan de formule magisch getal $= 0,5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$ is af te leiden.
- c** Bereken voor welke waarden van p het magische getal van zo'n vierkant ligt tussen 500 en 1000.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde C in 2013, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 23

Het aantal inwoners van België bedroeg in 1900 omstreeks 6,694 miljoen en in 2016 omstreeks 11,268 miljoen.

Noem het aantal inwoners van België in miljoenen N en de tijd in jaren na 1900 t .

- a** Ga uit van een lineaire groei van het Belgische inwoneraantal en stel een bijpassende formule voor N afhankelijk van t op.
- b** Schat door lineair extrapoleren het aantal inwoners van België in 2050.
- c** Ga uit van een exponentiële groei van het Belgische inwoneraantal en stel een bijpassende formule voor N afhankelijk van t op.
- d** Schat uitgaande van de exponentiële groei het aantal inwoners van België in 2050.
- e** In hoeveel jaar tijd verdubbelt bij exponentiële groei het aantal inwoners van België?

Opgave 24

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) houdt bij hoeveel studenten er zijn in het wetenschappelijk onderwijs in Nederland. De tabel geeft daar informatie over.

Iemand trekt uit de tabel de volgende twee conclusies:

1. Het aantal vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 ruim 6 procent lager dan in het studiejaar 1991-1992.
2. Het aandeel van de vrouwelijke studenten was in het studiejaar 1999-2000 groter dan in het studiejaar 1991-1992.

- a** Onderzoek voor elk van deze conclusies of deze juist is of niet.

Lenneke was een van die studenten. Zij heeft haar studie psychologie in september 2002 succesvol afgerond. Tijdens

haar studie heeft zij geld geleend van de IBG (Informatie Beheer Groep). In de loop van 2004 kreeg zij van de IBG het zogenoemde Bericht Terugbetalen. Daaruit komt het volgende citaat.

“Geachte mevrouw,

Volgens onze gegevens moet u per 1 januari 2005 beginnen met de terugbetaling van uw studieschuld. Op 1 januari 2005 bedraagt deze schuld 3011 euro.

U kunt uw schuld ineens betalen, maar u mag dit ook in maandelijkse termijnen doen.

In uw situatie is deze maandelijkse termijn vastgesteld op 45,41 euro en dit bedrag zal op de laatste dag van iedere maand van uw rekening worden afgeschreven. Bij het terugbetalen berekent de IBG een rente van 3,73% op jaarbasis over de schuld die overblijft.”

Een rente van 3,73% per jaar betekent een rente van (ongeveer) 0,3% per maand.

- b** Laat met behulp van een berekening zien dat dit klopt.

studiejaar	mannen	vrouwen
1991 - 1992	98272	75281
1992 - 1993	97784	76739
1993 - 1994	97270	78052
1994 - 1995	95256	78372
1995 - 1996	91310	75959
1996 - 1997	83850	70226
1997 - 1998	80472	68014
1998 - 1999	79347	68524
1999 - 2000	80113	70631

Tabel 8

Lenneke besloot destijds om vanaf januari 2005 elke maand 45,41 euro af te lossen. De hoogte van haar schuld S_n na n maanden voldoet dus aan de volgende recurrente betrekking (recursieformule):

$$S_{n+1} = 1,003 \cdot S_n - 45,41 \text{ met } S_0 = 3011.$$

Bij de Oudejaarsloterij van december 2005 wint Lenneke 2500 euro. Zij besluit dit bedrag op 1 januari 2006 voor haar aflossing te gebruiken.

- c** Heeft Lenneke op 2 januari 2006 nog schulden bij de IBG? Licht je antwoord met een berekening toe.

(bron: examen wiskunde A1 in 2009, tweede tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
