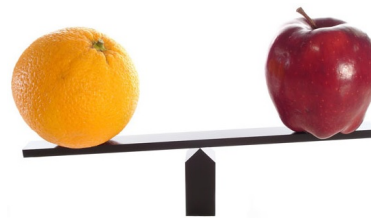


7.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

Inleiding

In deze figuur is duidelijk sprake van een ongelijkheid: de sinaasappel is zwaarder dan de appel, het gewicht van de sinaasappel is groter dan dat van de appel. Maar ja, wat zegt dat nou nog? In de wiskunde wil je vaak een vergelijking of een ongelijkheid gebruiken om ook echt iets te berekenen...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- niks nieuws, zoek de benodigde kennis waar nodig op in voorgaande onderwerpen.

Voorkennis

- vergelijkingen en ongelijkheden grafisch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt wat geld om opzij te zetten. Sparen is een optie. Je stort dan het geld op een spaarrekening en komt daar verder niet meer aan.

Een andere mogelijkheid is het geld (laten) beleggen. Je stort het dan op een beleggingsrekening.

Sparen is veilig, maar de rente is niet hoog. Beleggen is risicovol (je kunt alles kwijt raken), maar een goede belegger zorgt voor een behoorlijk rendement op een beleggingsrekening.

- Stel je hebt € 1500,00 om iets mee te doen. Zoek op hoe hoog de spaarrente op dit moment is en hoe hoog de beleggingsrendementen zijn die worden aangeboden. Bedenk hoeveel je gaat sparen en hoeveel je gaat beleggen.
- Hoeveel heb je over 10 jaar verdiend als je verwachtingen uitkomen? Welke van beide rekeningen heeft meer opgeleverd?

Uitleg

Stel je hebt op 1 januari 2017 € 1250,00 op een spaarrekening gezet tegen een vaste rente van 0,4% per jaar. Daarna stort je geen geld meer op deze rekening en neem je geen geld op. Voor het saldo geldt dan:

$$S = 1250 \cdot 1,004^t$$

Hierin is S het bedrag op de spaarrekening (€) en t de tijd in jaar na 1 januari 2017.

Wanneer heb je € 1500,00 op deze spaarrekening staan?

Hierbij hoort de vergelijking:

$$1250 \cdot 1,004^t = 1500$$

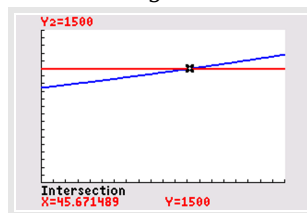
Deze vergelijking kun je algebraïsch oplossen. Dan gebruik je de balansmethode en logaritmen.

Maar je kunt een vergelijking ook met de grafische rekenmachine oplossen.

Voer in: $y_1 = 1250 \cdot 1,004^x$ en $y_2 = 1500$.

Kies als venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 75$ en $0 \leq y \leq 2000$.

Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 45,7$. Omdat de rente alleen op 1 januari wordt uitbetaald, heb je pas op 1 januari 2063 een bedrag van € 1500,00 (of meer) op je rekening staan.

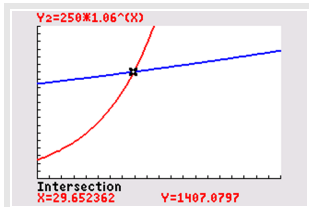


Figuur 2

Je vond dit lang duren en hebt ook wat geld op een beleggingsrekening gezet. Beleggen biedt geen garanties, je kunt hiermee ook al je geld kwijtraken. Een vriend van je heeft met eenzelfde beleggingsrekening al jaren een rendement van 6%. Je gaat ervan uit dat dit ook voor jou geldt. Je hebt op 1 januari 2017 € 250,00 op de beleggersrekening gezet. De formule hierbij is: $B = 250 \cdot 1,06^t$. Hierin is B het te verwachten bedrag op de beleggingsrekening (€) en t de tijd in jaar na 1 januari 2017.

Wanneer verwacht je voor het eerst meer geld op de beleggingsrekening te hebben dan op de spaarrekening?

Hierbij hoort de ongelijkheid: $250 \cdot 1,06^t > 1250 \cdot 1,004^t$.



Figuur 3

Los de ongelijkheid grafisch op.

Voer in: $y_1 = 1250 \cdot 1,004^x$ en $y_2 = 250 \cdot 1,06^x$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 75$ en $0 \leq y \leq 2000$.

Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 29,7$. Op 1 januari 2047 verwacht je meer geld op de beleggingsrekening te hebben dan op de spaarrekening.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de [Uitleg](#).

- a** Wanneer heb je € 1400,00 op de spaarrekening?

Het rendement van de beleggingsrekening blijkt geen 6%, maar 7% te zijn.

- b** Wanneer heb je dan voor het eerst meer geld op de beleggingsrekening dan op de spaarrekening?

Opgave 2

Los grafisch op. Rond af op één decimaal.

- a** $x^5 + 2x = -6500$
- b** $\frac{2x^2 - 3x}{4x} > x^2 - 20$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor een snijpunt van twee grafieken $y_1 = f(x)$ en $y_2 = g(x)$ geldt: $f(x) = g(x)$.

Dit is een **vergelijking**.

Een vergelijking kan in sommige gevallen met de balansmethode exact of algebraïsch worden opgelost voor x . Deze waarde van x bepaalt het punt waarin beide lijnen dezelfde y -waarde hebben. Het punt (x, y) is dan het snijpunt.

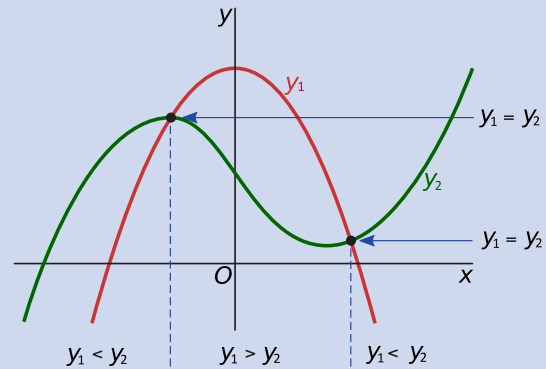
Een vergelijking kan ook met de grafische rekenmachine grafisch worden opgelost. Hierbij plot je de grafieken en laat je de rekenmachine snijpunten bepalen.

Een **ongelijkheid** kent de vormen:

$f(x) < g(x)$ of $f(x) \leq g(x)$ of $f(x) > g(x)$ of $f(x) \geq g(x)$

Het oplossen van een ongelijkheid:

- Voer beide functies op de grafische rekenmachine in en breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn.
- Bepaal de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine of door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.



Figuur 4

Voorbeeld 1

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh heeft onder andere een formule opgesteld voor Schotse hooglanders:

$$H = 8,9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

Hierin is G het gewicht (kg) van een Schotse hooglander en H de bijbehorende huidoppervlakte (dm^2).

Vanaf welk gewicht is de huidoppervlakte van een Schotse Hooglander meer dan 500 dm^2 ?

Antwoord

Hierbij hoort de ongelijkheid:

$$8,9 \cdot G^{\frac{2}{3}} > 500$$

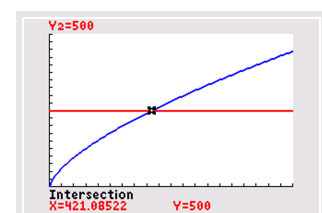
Deze ongelijkheid kun je algebraïsch oplossen, je maakt dan gebruik van de balansmethode en de rekenregels voor machten. Je kunt een ongelijkheid ook grafisch oplossen, je maakt dan gebruik van grafieken op de grafische rekenmachine.

Voer in: $y_1 = 8,9 \cdot x^{\frac{2}{3}}$ en $y_2 = 500$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 1000$ en $0 \leq y \leq 1000$.

Bepaal het snijpunt van de twee grafieken. Dit geeft $x \approx 421$.

Bij een gewicht van meer dan 421 kg is de huidoppervlakte van een Schotse hooglander meer dan 500 dm^2 .



Figuur 5

Opgave 3

Meeh heeft ook een formule opgesteld voor mensen:

$$H = 11,2 \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

Hierin is G het gewicht (kg) van een mens en H de bijbehorende huidoppervlakte (dm^2).

Vanaf welk gewicht is de huidoppervlakte van een mens meer dan 200 dm^2 ?

Opgave 4

Los grafisch op. Rond af op twee decimalen.

- a $15,6x^5 < 3000000$
- b $3,75x^{0,5} + 18 \geq 25$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^3 + 1$ en $g(x) = 2x$.

Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten en los op: $f(x) < g(x)$.

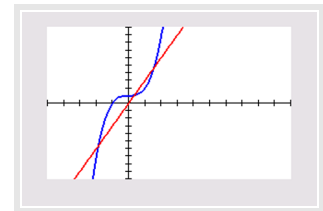
Antwoord

Voer in: $y_1 = x^3 + 1$ en $y_2 = 3x$.

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.

De snijpunten zijn: $(-1,88; -5,64)$, $(0,35; 1,04)$ en $(1,53; 4,60)$.

Je kunt uit de grafiek aflezen: $x < -1,88 \vee 0,35 < x < 1,53$.



Figuur 6

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x(x - 3)^2$ en $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

- a Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
- b Had je de snijpunten van de grafieken van f en g ook algebraïsch kunnen berekenen?
- c Los op: $f(x) > g(x)$.

Verwerken

Opgave 6

Bij een autodealer kun je vier jaar lang in een Smart ForTwo rijden voor € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer sluit je een abonnement af waarmee alle onderhoudskosten worden afgedekt. Je hebt verder alleen nog benzinekosten. Met 1 liter benzine rijd je 16 kilometer. 1 liter benzine kost € 1,60.

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost je deze Smart per jaar als je er 16000 km/jaar mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je dat jaar minder dan € 4000 wilt besteden? Los daarna de ongelijkheid grafisch op.



Figuur 7

Opgave 7

Los de ongelijkheden met de grafische rekenmachine op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $x^3 + 3x^2 - 3 > 0$
- b $2(x - 4)^2 - 5 < 5x$
- c $(x + 3)^2 < 5x$
- d $x^4 - 3x > -x^2 + 3$

Opgave 8

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

- a Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.
- b Had je de snijpunten van de grafieken van f en g ook algebraïsch kunnen berekenen?
- c Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 9

Een man met een gewicht van 91 kilogram krijgt van een diëtiste het advies om af te vallen tot een gewicht van 75 kilogram. Ze adviseert hem om iedere dag slechts 2520 kilocalorieën aan energie te consumeren.

De diëtiste geeft hem een tabel mee die is gebaseerd op het rekenmodel. In de tabel is t de tijd in maanden vanaf het moment dat de man dagelijks 2520 kilocalorieën aan energie consumeert, G het gewicht van de man in kilogram en A het aantal kilogram dat hij nog moet afvallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
G	91,0	89,1	87,4	85,9	84,6	83,4	82,4
A	16,0	14,1	12,4	10,9	9,6	8,4	7,4

Tabel 1

Uit de tabel blijkt bijvoorbeeld dat de man, wanneer hij zich aan het dieetadvies houdt, na drie maanden een gewicht G heeft van 85,9 kilogram. Dat is 10,9 kilogram boven het gewenste gewicht van 75 kilogram, dus het aantal nog af te vallen kilogram A is 10,9. Uit de tabel blijkt dat A bij benadering exponentieel afneemt. Hierbij hoort de formule:

$$A = 16 \cdot 0,88^t \text{ (met } t \text{ in maanden)}$$

De man houdt zich nauwgezet aan het dieetadvies.

- a Bereken na hoeveel maanden de man 12 kilogram is afgevallen.
- b Bereken voor welke t de man minder dan 80 kilogram weegt.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 10

In China zijn tegenwoordig veel schoonheidssalons. Begin 2005 waren dat er 1,6 miljoen, terwijl het land toen ongeveer 1300 miljoen inwoners telde. Om Nederland en China goed met elkaar te kunnen vergelijken kijk je naar het aantal schoonheidssalons per 25000 inwoners. In Nederland neemt het aantal schoonheidssalons per 25000 inwoners ongeveer lineair toe. Ga ervan uit dat deze lineaire groei na 2005 op dezelfde wijze doorgaat. Geef het aantal schoonheidssalons in Nederland per 25000 inwoners aan met V_N . Dan geldt bij benadering: $V_N = 17 + 0,6t$.

In deze formule is t de tijd in jaar met $t = 0$ voor het begin van 2005.

Geef met V_C het aantal schoonheidssalons in China per 25000 inwoners aan. Dat aantal blijkt in China niet lineair, maar bij benadering exponentieel toe te nemen. Iemand heeft vastgesteld dat dit proces goed wordt beschreven met als formule voor V_C : $V_C = 30,8 \cdot 1,06^t$. Hierbij is t de tijd in jaar met $t = 0$ voor het begin van 2005.

Volgens deze formules zullen beide landen nog deze eeuw één schoonheidssalon op de 500 inwoners hebben. Hoeveel jaar later dan in China zal dit in Nederland het geval zijn? Licht je antwoord toe.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2010, eerste tijdvak)

Opgave 11

Een oude weegschaal werkt niet goed meer. Een gewicht dat minder dan 1000 gram weegt, wordt goed gewogen. Maar is het 1000 gram of meer, dan geeft de weegschaal een of ander getal groter dan 1000. Vijf gewichten, A , B , C , D en E wegen elk minder dan 1000 gram. Als ze in paren worden gewogen, dan geeft de weegschaal het volgende:

$$B + D = 1200$$

$$C + E = 2100$$

$$B + E = 800$$

$$B + C = 900$$

$$A + E = 700$$

Welk gewicht is het zwaarst?

Toepassen

Opgave 12: JAG/TI-methode

Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt het KNMI behalve de werkelijke temperatuur ook de gevoelstemperatuur. Sinds de winter van 2009/2010 hanteert het KNMI een nieuwe methode om de gevoelstemperatuur weer te geven. Deze methode is door de Joint Action Group on Temperature Indices (JAG/TI) ontwikkeld. De formule voor de gevoelstemperatuur G in $^{\circ}\text{C}$ op basis van de JAG/TI-methode luidt:

$$G = 13,12 + 0,6215 \cdot T - 11,37 \cdot W^{0,16} + 0,3965 \cdot T \cdot W^{0,16}$$

Hierin is T de werkelijke temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en W de gemiddelde windsnelheid in km/h.

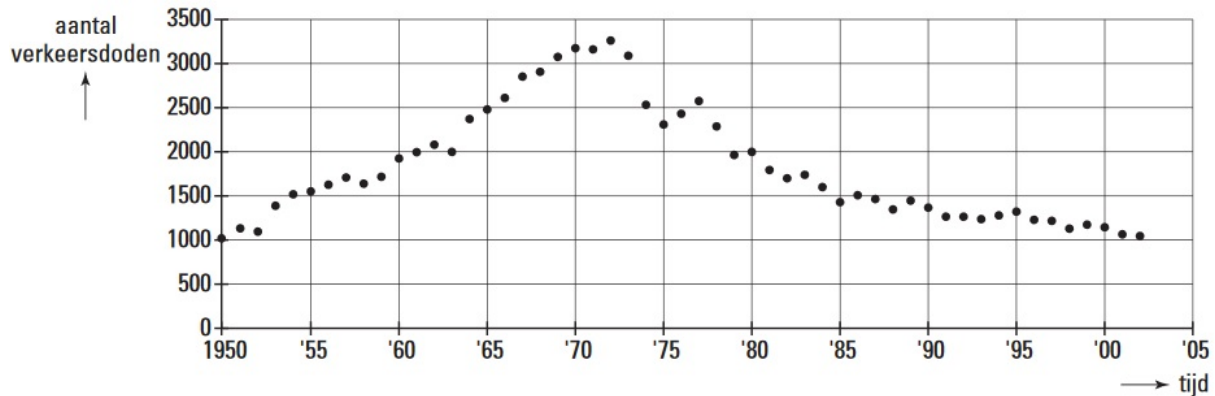
In Nederland begonnen de eerste dagen van 2010 met erg lage temperaturen. In de journaaluitzending van 7 januari 2010 werd gezegd dat het de dag erna -2°C zou worden, maar dat het door de snijdende wind veel kouder zou aanvoelen en dat de gevoelstemperatuur -9°C zou zijn.

- Bereken met behulp van de formule welke gemiddelde windsnelheid op 8 januari werd verwacht. Neem aan dat het bij toenemende windsnelheid kouder gaat aanvoelen; de formule van de JAG/TI-methode is ook zo opgesteld. De formule is ontwikkeld voor temperaturen tussen -46°C en $+10^{\circ}\text{C}$ en voor een gemiddelde windsnelheid tussen 5 km/h en 175 km/h.
- Bereken met deze gegevens de laagste en de hoogste gevoelstemperatuur die de formule kan geven. TNO heeft onderzoek gedaan naar de handvaardigheid (het kunnen werken met blote vingers) bij afnemende gevoelstemperatuur. Uit het onderzoek blijkt dat de handvaardigheid afneemt bij een lagere gevoelstemperatuur en langere blootstelling. Om nog met blote vingers te kunnen werken moet de maximale blootstellingsduur beperkt blijven, zodanig dat geldt:
 $G \cdot d^{0,48} = -113,07$
 Hierin is G de gevoelstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ met $G < 0$ en d de maximale blootstellingsduur in minuten. Met behulp van de formule $G \cdot d^{0,48} = -113,07$ kun je onderzoeken hoe de maximale blootstellingsduur verandert als de gevoelstemperatuur afneemt.
- Bereken met hoeveel minuten de maximale blootstellingsduur afneemt als de gevoelstemperatuur van -20°C afneemt tot -30°C .

(naar: examen vwo wiskunde C in 2012, tweede tijdvak)

Opgave 13: Verkeersslachtoffers in Nederland

Bekijk de figuur waarin een grafiek is weergegeven van het aantal verkeersdoden voor de jaren 1950 tot en met 2002.



Figuur 8

Uit de figuur blijkt dat het aantal verkeersdoden het grootst was in 1972. Toen waren er 3264 verkeersdoden. Door een actief beleid op het gebied van verkeersveiligheid is sinds die tijd het aantal verkeersdoden afgenomen tot 1066 in het jaar 2002. Weliswaar steeg het aantal verkeersdoden in sommige jaren, maar toch is er een duidelijke dalende trend waarneembaar in de periode 1972-2002. Je kunt deze trend beschrijven met een model waarbij het aantal verkeersdoden exponentieel afneemt van 3264 in 1972 tot 1066 in 2002.

- a** Volgens dit model zou het aantal verkeersdoden tussen 1972 en 2002 jaarlijks met een vast percentage dalen. Bereken dit percentage.

Het verloop van het aantal verkeersdoden, zoals blijkt uit de figuur, kan bij benadering worden beschreven met de formule:

$$N = 0,8 + \frac{t+2}{10+(0,04t)^{6,8}}$$

In deze formule is N het aantal verkeersdoden per jaar in duizendtallen en t de tijd in jaar vanaf 1950. $t = 0$ in 1950.

Deze formule is slechts een model dat hoort bij de figuur. Daarom komt de grafiek die hoort bij de formule niet precies overeen met de grafiek uit de figuur. Een belangrijk verschil is bijvoorbeeld dat volgens de formule de piek in het aantal verkeersdoden niet in 1972 plaatsvond, maar in een ander jaar.

- b** Onderzoek in welk jaar volgens deze formule de piek plaatsvond.

Uiteraard is ieder verkeersslachtoffer er een te veel. De overheid wil het aantal verkeersslachtoffers dan ook verminderen. Wanneer de overheid de reeds bestaande maatregelen voortzet, dan wordt verwacht dat het aantal verkeersdoden zich in de toekomst ontwikkelt volgens de formule. Alleen als de overheid nog extra maatregelen neemt om de verkeersveiligheid te bevorderen, zal het aantal verkeersdoden in de toekomst lager kunnen worden dan volgens de formule. De doelstelling is dat het aantal verkeersdoden minder dan 750 wordt.

- c** Onderzoek, uitgaande van de gegeven formule, of er inderdaad extra maatregelen nodig zijn om deze doelstelling te halen.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2006, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 14

Los grafisch op. Rond af op één decimaal.

- a** $2x^4 + 2x^2 = 7800$
b $\frac{x^2 - 5x}{8x} > x + 30$

Opgave 15

Los grafisch op. Rond af op twee decimalen.

- a** $7,5x^7 + 8,3 < -120$
b $5x^{0,25} - 11 \geq 2,5$

Opgave 16

Uit CO₂-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO₂-concentratie te hoog is. De CO₂-concentratie wordt gemeten met een CO₂-meter. Als de CO₂-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Het ministerie van OCW heeft 'Het Frisse Scholenproject' in het leven geroepen met als doel scholen te stimuleren minder energie te verbruiken en het binnenmilieu te verbeteren.

De CO₂-concentratie wordt gemeten in ppm. De afkorting ppm staat voor parts per million, oftewel het aantal deeltjes per miljoen.

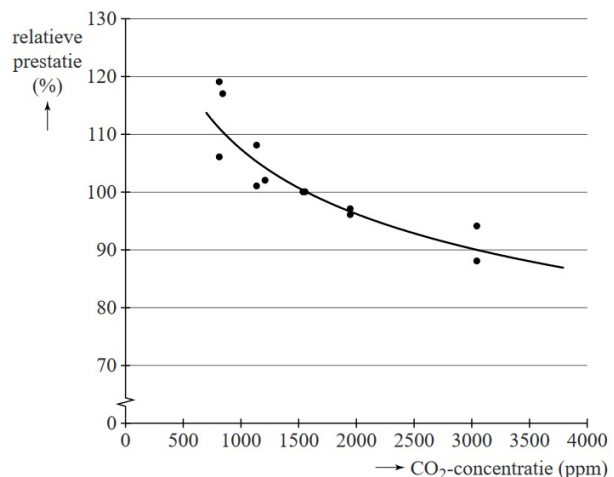
Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO₂-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In de figuur zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO₂-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. Uit de figuur blijkt dat bij een hogere CO₂-concentratie de relatieve prestatie afneemt.

In de figuur is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0,159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.

Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met de formule te onderzoeken vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

(naar: examen vwo wiskunde C in 2013, tweede tijdvak)



Figuur 9



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
