3.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip.
Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit.
Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op...
In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- alle rekenregels voor het werken met machten;
- exponentiële vergelijkingen met de grafische rekenmachine oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten, $t = 0$, is vandaag om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zullen er geweest zijn om 11:00 uur? En om 10:00 uur?

b Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd? Kan dat ook zonder formule alleen met de groeifactor?

c Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Figuur 1

Uitleg 1

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt:
$B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

tijd (uren)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$. Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -1$ (11:00 uur): $600 \cdot 2^{-1} = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300$;
- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$, enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op: in dat geval mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Neem **Uitleg 1** door. Kijk goed wanneer er negatieve exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

De hoeveelheid bacteriën B op een petrischaaltje na t uur, kan met de formule $B = 6 \cdot 2^t$ berekend worden. $t = 0$ komt overeen met tijdstip 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur en bijvoorbeeld per kwartier.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Dus: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op: nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren. Stel bijvoorbeeld dat $g = -1$, dan is $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ geen reëel getal.

Opgave 2

Neem **Uitleg 2** door. Kijk goed wanneer er gebroken exponenten worden gebruikt.

a Wat moet je in de formule $B = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken dit aantal op twee manieren, met het functievoorschrift en met behulp van de groeifactor per half uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

Opgave 3

Bekijk de groei van de bacteriën in **Uitleg 2**.

a Hoe groot is de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur? Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Hoe groot is de groeifactor per kwartier? Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur. Rond je antwoorden af op gehelen.

e Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na vijf uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier. Rond je antwoord af op gehelen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

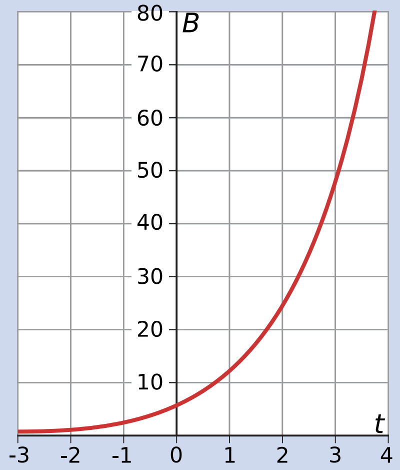
Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn de volgende afspraken nodig:

- **negatieve exponenten**: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- **gebroken exponenten**: $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n.

Beide afspraken passen in de **rekenregels voor machten**, bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$.

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, nul, een negatief getal of een gebroken getal is. In feite mag a elk reëel getal zijn. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 2

Voorbeeld 1

Het aantal leden van een vereniging neemt exponentieel toe. Hier zie je een tabel van het aantal leden vanaf het jaar 2009.

jaar	2009	2010	2011	2012	2013	2014
aantal leden	720	806	903	1011	1132	1268

Tabel 2

Controleer dat er inderdaad sprake is van exponentiële groei. Stel ook een formule op van het aantal leden N na t jaar, met $t = 0$ in 2009 en bereken met die formule hoeveel leden er in 2005 waren.

Antwoord

$\frac{806}{720} \approx 1{,}12$

Controleer dit ook bij de rest van de jaren en noteer je berekeningen. Het aantal leden neemt steeds met een factor van ongeveer 1,12 toe. Dus de groeifactor is ongeveer 1,12. Verder weet je dat het aantal leden in het jaar 2009 gelijk is aan 720. De formule is $N = 720 \cdot 1{,}12^t$.
Als je wilt weten hoeveel leden er in 2005 waren vul je voor t in de formule -4 in: $720 \cdot 1{,}12^{-4} \approx 458$. Dus er waren 458 leden in 2005.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** gaat het over het aantal leden van een vereniging.

a Hoeveel leden waren er in het jaar 2003?

b Bij de oprichting had de vereniging 207 leden. In welk jaar is de vereniging opgericht?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 5% rente per jaar (vroeger kon dat nog). De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of maandelijks. Met welke rentepercentages moeten ze dan werken? Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,05. Noem de groeifactor per half jaar g. De waarde hiervan kun je op twee manieren uitrekenen:

- De groeifactor per jaar is 1,05. Dus er moet gelden $g \cdot g = g^2 = 1{,}05$, hieruit volgt $g = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}0247$;
- $g = 1{,}05^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0247$.

De rente per half jaar is dus ongeveer 2,47%.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1{,}05^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0041$ of $\sqrt[12]{1{,}05} \approx 1{,}0041$. De rente per maand is dus ongeveer 0,41%.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank tegen een rente van 4,2% per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

a Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.

b Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.

c Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Voorbeeld 3

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De tijd waarin de concentratie gehalveerd is noem je de **halveringstijd**. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Meer hierover in **het artikel C14-datering in de Wikipedia**.

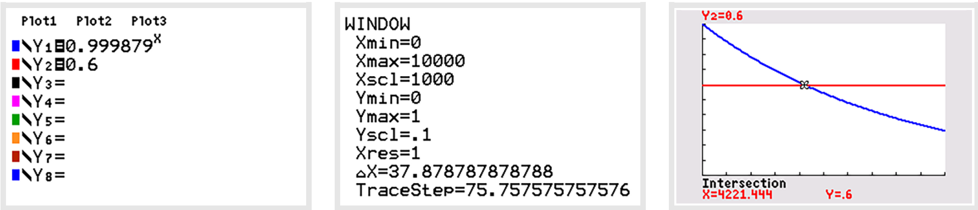
Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan dus nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Stel dat de concentratie C14 op een bepaald moment c is, dan is die concentratie in 5736 jaar gehalveerd tot 0,5c. Omdat de hoeveelheid C14 exponentieel afneemt geldt $0{,}5c = c \cdot g^{5736}$, waarin g de groeifactor per jaar is.

Deze vergelijking kun je herleiden tot $g^{5736} = \frac{0{,}5c}{c}$ en dus geldt $g^{5736} = 0{,}5$.

Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0{,}5} \approx 0{,}999879$. Als t de leeftijd van de mummie is moet gelden $0{,}999879^t = 0{,}6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine. Je vindt $t \approx 4221$. De mummie is ongeveer 4221 jaar oud.



Figuur 3

Uit dit voorbeeld blijkt dat je voor het rekenen met halveringstijd geen hoeveelheden nodig hebt. In het algemeen geldt $g^t = 0{,}5$. Dit is op vergelijkbare wijze ook van toepassing bij verdubbelingstijd: de tijd waarin een hoeveelheid is verdubbeld. Er geldt dan in het algemeen $g^t = 2$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C-14 38% is.

Verwerken

Opgave 7

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (in jaren) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Hoe groot is het groeipercentage per maand?

e Bereken het aantal inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 8

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 naar 3000.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per 3 uur?

b Bereken het groeipercentage per uur.

c Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als H de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren is. Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn.

d Op welk moment waren er nog 600 bacteriën?

Opgave 9

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b In welke periodes is de wereldbevolking verdubbeld?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 10

Op 1 januari 2012 heeft iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal staat al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

a In welk jaar had het kapitaal een grootte van € 5618,00?

b Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.

c De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer, denk je, is hij begonnen? En met welk bedrag?

Toepassen

Opgave 11: Radioactiviteit

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in twee jaar 19% omgezet in radium-224. Een laboratorium had in het jaar 2001 nog 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, na t jaar met $t = 0$ op het moment dat er 1000 mg radium-228 aanwezig was.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 200 milligram omgezet is in radium-224.

c Bereken hoe lang het duurt voortdat de helft van de aanwezige radium-228 omgezet is in radium-224.

d Schat met behulp van je antwoord op c hoelang het duurt tot 750 milligram radium-228 is omgezet in radium-224.

Testen

Opgave 12

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten zit er in een liter water tien gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15% toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15% per week. Hoeveel bedroeg de concentratie drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Hoeveel bedroeg de concentratie twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 13

Van een bepaald soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vier jaar later zijn er nog maar ongeveer 4300.

a Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders. Rond af op twee decimalen.

b Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).

c Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?

d Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?

e Bereken na hoeveel jaar het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000 zal zijn.