

3.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer kilometers in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131K	262K	524K	1M	2M	4M	8M
16M	33M	67M	134M	268M	536M	1G	2G
4G	8G	17G	34G	68G	137G	274G	549G
1T	2T	4T	8T	17T	35T	70T	140T
281T	562T	1P	2P	4P	9P	18P	36P
72P	144P	288P	576P	1E	2E	4E	9E

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname, bijpassende formules opstellen;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je voor dat je een heel groot vel papier hebt (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

- Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?
- Waarom zal dit met een A4-tje nooit lukken?
Stel dat het onbegrensde vel papier 0,15 mm dik is.
- Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?
- Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 cm dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte constante temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel is te zien.

<i>tijd (uren)</i>	0	1	2	3	4	5	6
<i>hoeveelheid bacteriën</i>	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur is er $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën; enzovoort.

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2, dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met het voorbeeld van bacteriegroei en de functie $B(t)$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt trek je de exponenten af.

Figuur 2

- De groeifactor per uur is 2. Per drie uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $(2^3)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Opgave 1

Lees het verhaal van de bacteriegroei in de [Uitleg](#).

- Wat versta je onder de 'groeifactor' per uur van de hoeveelheid bacteriën?
- Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?
- Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?
- Hoeveel bacteriën heb je na 13 uur?
- Hoeveel bacteriën heb je na 15 uur?

Opgave 2

Schrijf als één macht, gebruik de rekenregels.

- $2^4 \cdot 2^{14}$
- $3^3 \cdot 3^5$
- $\frac{5^9}{5^4}$
- $(6^3)^6$

Opgave 3

Bekijk de tabel.

tijd (h)	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
bacteriën	50	150	450	1350	4050	12150	36450

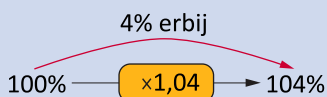
Tabel 2

- Toon aan dat er sprake is van exponentiële groei.
- Hoe groot is de groeifactor?
- Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar. Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van **exponentiële groei**. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.



Figuur 3

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.

Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

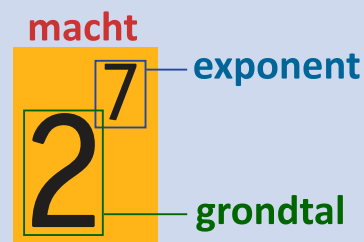
Als je de groeifactor g weet, kun je met de formule $p = 100 \cdot (g - 1)$ het groeipcentage uitrekenen.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g , dan schrijf je dat als g^n . Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele getallen n en m de volgende **rekenregels**:

$$g^n \cdot g^m = g^{n+m}$$

$$\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$$

$$(g^n)^m = g^{n \cdot m}$$



Figuur 4

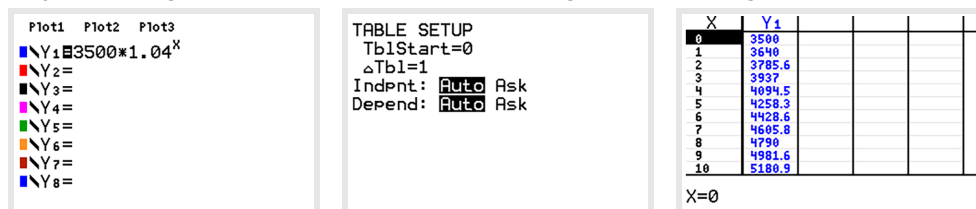
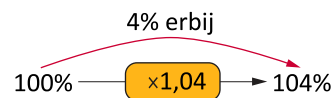
Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf (toen nog) op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert.

- Stel de formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- Maak een tabel met de grafische rekenmachine en bekijk hoe het saldo zich ontwikkelt.
- Wat is de groeifactor per drie jaar? En per vijf jaar?

Antwoord

- Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom $S = 3500 \cdot 1,04^t$.
- Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel. **Figuur 5**
- Per drie jaar is de groeifactor: $1,04^3 \approx 1,12$ dus het groeipercentage is dan ongeveer 12. Per vijf jaar is de groeifactor: $1,04^5 \approx 1,22$ dus de groei is dan ongeveer 22%.



Figuur 6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

- Hoe groot is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?
- Hoeveel staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?
- Welke formule geldt voor het spaartegoed S uitgedrukt in t , waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010 is?
- Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.
- Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen:
 - $t = 20$ invullen in de formule;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vier jaar;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per vijf jaar.

Voorbeeld 2

Een krant zag in een reeks van jaren het aantal jaarabonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 3

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal jaarabonnementen onder de 500.000 zakt raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

De jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei. De groeifactor $g \approx 0,97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname.

Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3 procent af.

Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0,97^t$.

Maak vervolgens een tabel van deze functie met de rekenmachine.

Ga na dat op $t = 22$ de waarde van A minder dan 500 is.

Op deze manier raakt de krant in 2032 in de problemen.

Opgave 5

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**, waarbij sprake is van exponentiële afname.

- Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad telkens ongeveer 0,97 is.
- Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?
- Laat zien dat de krant in 2032 inderdaad in de problemen raakt.

Opgave 6

Neem de tabel over en vul in:

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 4

Voorbeeld 3

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht.

- $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{50} \cdot 3^{60}}$
- $\frac{4^{1000} \cdot 16^{212}}{8^{812}}$

Antwoord

Deze machten kun je niet berekenen met de grafische rekenmachine. Je moet hier de rekenregels van machten toepassen.

- $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{50} \cdot 3^{60}} = \frac{3^{16 \cdot 10}}{3^{50+60}} = \frac{3^{160}}{3^{110}} = 3^{160-110} = 3^{50}$
- Alle getallen zijn machten van twee: $4 = 2^2$, $16 = 2^4$ en $8 = 2^3$. En dus staat hier:

$$\frac{(2^2)^{1000} \cdot (2^4)^{212}}{(2^3)^{812}} = \frac{2^{2 \cdot 1000} \cdot 2^{4 \cdot 212}}{2^{3 \cdot 812}} = \frac{2^{2000} \cdot 2^{848}}{2^{2436}} = \frac{2^{2000+848}}{2^{2436}} = \frac{2^{2848}}{2^{2436}} = 2^{2848-2436} = 2^{412}$$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als één macht van twee of één macht van drie te schrijven.

- $3^{83} \cdot (3^{40})^2$
- $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$
- $\frac{(3^{21})^4 \cdot 3^{41}}{(3^3)^9}$
- $\frac{4^9 \cdot 2^4}{16^3}$

Verwerken

Opgave 8

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2 . Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. In 2017 constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

- Geef de formule van de met riet begroeide oppervlakte R (in km^2) na t jaar met $t = 0$ op 1 januari 2014.
- Maak een tabel bij deze formule voor de eerste vijf jaar.
- In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 9

Neem de tabel over en vul in.

p is de procentuele toename per jaar.

g is de groeifactor per jaar.

p	17			-9	-0,15				
g		1,007	2,051			0,78	0,07	1,02	3,96

Tabel 5

Opgave 10

Schrijf als één macht.

- $2^{41} \cdot 2^{39}$
- $\frac{2^4}{2}$
- $(5^3)^2$
- $\frac{(2^4)^{128}}{2^{509}}$
- $(5^2)^4 \cdot 5^3$

Opgave 11

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

- Stel een formule op voor de 'groei' van het aantal herten vanaf het jaar 2014.
- Bereken het aantal herten in het jaar 2024.
- Bereken het groeipercentage per tien jaar.
- In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 12

Schrijf als één macht van twee of één macht van drie.

- $\frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$
- $\frac{64^{56}}{(2^7)^{12}}$

- c $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 27^{24}}$
- d $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

Toepassen

Opgave 13: Rendement op aandelen

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

<i>tijd (jaren)</i>	1	2	3	4	5	6
<i>kapitaal (euro)</i>	10415	10850	11300	11760	12250	12760

Tabel 6

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

- Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.
- Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).
- Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.
- Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?
- Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar behaalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal K na vijf jaar en na tien jaar.
- Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 14: Zakgeld

Mark en Peter zijn tweelingbroers. Toen ze 14 jaar oud waren kregen ze € 5,00 zakgeld per week. Met hun vijftiende verjaardag vond de vader het slimmer om ze ieder jaar zakgeld te geven in plaats van iedere week. De vader gaf zijn kinderen twee opties:

- Je zakgeld wordt ieder jaar verdubbeld.
- Je zakgeld gaat ieder jaar met € 100,00 omhoog!

Mark koos voor optie 1. Peter voor optie 2.

Onderzoek in welk jaar Mark voor het eerst meer krijgt dan Peter.

Testen

Opgave 15

Iemand betaalt een huur van € 950,00 (per maand). Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

- Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.
- Maak een tabel waarmee je kunt uitzoeken hoe lang het duurt tot de huur meer dan € 1300,00 per maand is geworden.
- Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar?
- Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.
- Bereken het groeipercentage per twintig jaar.
- Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 16

Schrijf als één macht.

a $\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^3)^{21}}$

b $\frac{2^{45} \cdot 64^{22}}{8^{20}}$

Opgave 17

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12% in waarde dalen.

- a** Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen is.
- b** Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?
- c** Bereken het groeipercentage per 5 jaar.
- d** Met welk getal moet je de waarde na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na 10 jaar.
- e** Bereken het groeipercentage per 10 jaar.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
