

1.2 Formules herschrijven

Inleiding

Formules kun je vaak op verschillende manieren schrijven. Zo kun je de omtrek van een rechthoek uitleggen als 'Tel lengte en breedte en lengte en breedte bij elkaar op', maar ook als 'Neem 2 keer de lengte en 2 keer de breedte en tel dat bij elkaar op'. Dan zeg je verschillende dingen, maar die leveren toch altijd dezelfde omtrek op. Het zijn gelijkwaardige formules (in woorden). Soms is de éne versie van de formule handiger, soms werk je liever met een andere...

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden;
- haakjes uitwerken;
- ontbinden in factoren;
- werken met breuken.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,45 hectare (dus 4500 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b .

- Stel bij dit probleem een formule op die past bij de gegeven omtrek en één die past bij de gegeven oppervlakte.
- Schrijf beide formules in de vorm $l = \dots$
- Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?



Figuur 1

Uitleg

Als een rechthoek met lengte l en breedte b een omtrek heeft van 360 m, dan geldt de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$.

Die formule kun je schrijven als $2l + 2b = 360$ en dan verder herleiden:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 \\ l + b &= 180 \\ l &= 180 - b \end{aligned}$$

Red arrows indicate the steps: from the first equation to the second, a red arrow points to the right with the text 'beide zijden /2'; from the second equation to the third, a red arrow points to the left with the text 'beide zijden - b'.

Nu heb je l uitgedrukt in b . Zoiets doe je om grafieken te maken, l komt op de verticale as.

Als deze rechthoek een oppervlakte van 4500 m² moet hebben, geldt ook $l \cdot b = 4500$.

En dit kun je herleiden:

$$\begin{aligned} l \cdot b &= 4500 \\ l &= \frac{4500}{b} \end{aligned}$$

A red arrow points from the second equation to the first with the text 'beide zijden /b'.



Figuur 2

Wil je nu weten voor welke b de rechthoek aan beide eisen voldoet, dan kun je met twee grafieken werken. Maar je kunt ook een vergelijking maken en die oplossen:

$$\begin{aligned}\frac{4500}{b} &= 180 - b \\ 4500 &= 180b - b^2 \\ b^2 - 180b + 4500 &= 0 \\ (b - 30)(b - 150) &= 0 \\ b &= 30 \vee b = 150\end{aligned}$$

 beide zijden met b vermenigvuldigen
 op 0 herleiden
 ontbinden in factoren
 oplossingen opschrijven

Je vindt dus twee mogelijke waarden voor de breedte van deze rechthoek.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ eenvoudiger kunt schrijven als $l + b = 180$. Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

- a $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$
- b $2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$
- c $y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$
- d $2xy + xy - 3x = 18$

Opgave 2

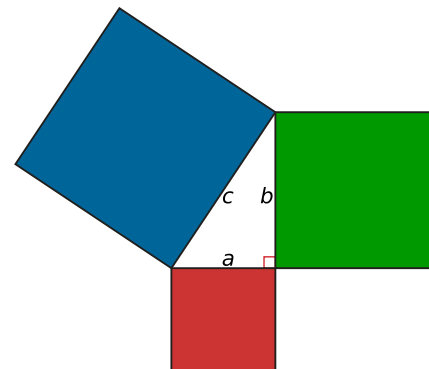
Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ kunt schrijven in de vorm $l = 180 - b$. Herleid de volgende formules zodat y is uitgedrukt in x .

- a $2x - 4y = 10$
- b $-3x + 5 = 10 - 2y$
- c $5x + 10xy = 20$
- d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras.
In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$.

- a Geef twee gelijkwaardige formules.
- b Neem $a = 3x$ en $b = 4x$ en druk c uit in x .
Neem aan dat $x > 0$.



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules kun je **herleiden** (of **herschrijven**) met rekenregels. Zo is de uitdrukking $l + l + b + b$ te herleiden tot $2l + 2b$.

Als je in beide uitdrukkingen dezelfde waarden voor de variabelen b en l invult, geven ze een gelijke waarde als uitkomst. De uitdrukkingen zijn dus **gelijkwaardig**.

Formules kunnen ook gelijkwaardig zijn. Zo zijn $2l + 2b = 60$ en $b = 30 - l$ gelijkwaardig, want als je dezelfde waarden voor b respectievelijk l invult, zijn beide formules tegelijk 'waar' of 'niet waar'. En daarom zijn dit **gelijkwaardige formules**.

Formules blijven gelijkwaardig als je de gewone rekenregels toepast, zoals haakjes wegwerken, ontbinden in factoren en rekenen met breuken. Ook mag je:

- aan beide zijden van een isgelijktteken hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van een isgelijktteken met hetzelfde vermenigvuldigen of delen (behalve vermenigvuldigen of delen met 0);
- de uitdrukkingen aan beide zijden van het isgelijktteken verwisselen.

Hier zie je nog een keer de rekenregels voor werken met haakjes en breuken:

- **haakjes wegwerken** (ook wel 'haakjes uitwerken'):

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

- **ontbinden in factoren:**

$$a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

$$x^2 + p \cdot x + q = (x + a) \cdot (x + b) \text{ met } a + b = p \text{ en } a \cdot b = q \text{ (de productsom methode)}$$

- **breuken optellen/aftrekken:**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

- **breuken vermenigvuldigen** (ga ervan uit dat er nergens door 0 wordt gedeeld):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- **breuken delen**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ of } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Voorbeeld 1

Voorbeelden van haakjes wegwerken zijn:

- $-2 \cdot (x - y) = -2 \cdot x - -2 \cdot y = -2x + 2y$
- $2x^2 \cdot (x^3 - 5x) = 2x^2 \cdot x^3 - 10x^2 \cdot x = 2x^5 - 10x^3$
- $2 - (x - 5) = 2 - x - -5 = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x + 3)(x - 5) = (x + 3)(x + -5) = x \cdot x + x \cdot -5 + 3 \cdot x + 3 \cdot -5 = x^2 - 2x - 15$

Denk na vóór je haakjes wegwerkt. Bijvoorbeeld: aan de uitdrukking $(x - 5)^2$ zie je gemakkelijk dat die gelijk is aan 0 als $x = 5$. Werk je de haakjes weg, dan krijg je de uitdrukking $x^2 - 10x + 25$ en zie je dat een stuk minder snel.

Pas ook goed op met de volgende berekening (waar staan de haakjes?):

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + 3$

Bij de eerste breuk moet je zowel x als 6 door 2 delen.

Met een getalvoorbeeld kun je zien dat de tweede breuk niet goed is uitgewerkt.

Kies je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zou de uitkomst $\frac{6}{1+2} = 2$ moeten zijn en niet $\frac{6}{1} + 3 = 9$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

- $3x \cdot (x - 2y)$
- $2a - (9a + 6)$
- $0,5p \cdot 100p - p \cdot (20p + 100)$
- $-5p^3(p^2 - 3p^3)$
- $0,5x \cdot (10x - 3) - 5x^2$
- $\frac{3(x+2)+6}{3}$

Opgave 5

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

- a $(x + 2) \cdot (x + 4)$
- b $2(b + 4)(b - 2)$
- c $(l + 3)(l - 3)$
- d $(5c - 4)^2$

Voorbeeld 2

Voorbeelden van ontbinden in factoren zijn:

	-12	
1	-12	
2	-6	← -4
3	-4	
-3	4	
-2	6	
-1	12	

Figuur 4

- $2x^2 + 6xy = 2x \cdot x + 2x \cdot 3y = 2x(x + 3y)$
- $-x^2 + 4x = -x \cdot x - (-x) \cdot 4 = -x(x - 4)$
- $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$ (de somproductmethode toepassen, zie figuur)
- $3x^4 + 9x^8 = 3x^4(1 + 3x^4)$

Opgave 6

Ontbind in factoren.

- a $2x^2 + 10x$
- b $3x^2 - 9x$
- c $x^2 + 5x + 4$
- d $b^2 - 9b + 8$
- e $k^2 - 17k + 16$

Opgave 7

Ontbind in factoren.

- a $c^3 + 2c^2 + c$
- b $p^3 - p^5$
- c $2x^4 + 8x^{10}$
- d $3y^4 - 6y^5$

Voorbeeld 3

Als breuken gelijknamig zijn, mag je ze bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{5}{a} - \frac{2}{a} = \frac{3}{a}$$

Als je breuken met verschillende noemers wilt optellen of aftrekken, moet je ze eerst gelijknamig maken.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{4y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{3x+4y}{xy}$$

Breuken vereenvoudig je door teller en noemer door hetzelfde getal te delen.

Hier zie je nog een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a} + \frac{5}{a} = \frac{7}{a}$
- $\frac{2}{a} - \frac{5}{a} = \frac{-3}{a} = -\frac{3}{a}$
- $\frac{2}{a} - \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} - \frac{5a}{ab} = \frac{2b-5a}{ab}$
- $\frac{2}{3a} + \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3a^2} + \frac{15}{3a^2} = \frac{2a+15}{3a^2}$
- $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x(x+3)} - \frac{1 \cdot x}{x(x+3)} = \frac{x+6}{x(x+3)}$

Opgave 8

Schrijf als één breuk.

- a $\frac{2}{7} + \frac{1}{9}$
- b $\frac{2}{7} - \frac{1}{3}$
- c $\frac{2}{a} + \frac{1}{a}$
- d $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

Opgave 9

Schrijf als één breuk.

- a $\frac{2}{x} + \frac{5}{y}$
- b $\frac{-3}{a} - \frac{8}{a^2}$
- c $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
- d $\frac{2}{a} - \frac{3}{2a+1}$

Voorbeeld 4

Breuken kun je vermenigvuldigen of delen.

Bij delen kun je direct gebruiken: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Delen door de breuk $\frac{c}{d}$ is gelijkwaardig met vermenigvuldigen met de breuk $\frac{d}{c}$.

Hier zie je een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a} \cdot \frac{5}{a} = \frac{10}{a^2}$
- $\frac{2}{a} \div \frac{5}{a} = \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5} = \frac{2 \cdot a}{5 \cdot a} = \frac{2}{5}$; opmerking: $\frac{a}{a} = 1$.
- $\frac{2}{a} \div \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} \div \frac{5a}{ab} = \frac{2b}{5a}$ of $\frac{\frac{2}{a}}{\frac{5}{b}} = \frac{2}{a} \cdot \frac{b}{5} = \frac{2b}{5a}$
- $\frac{2a}{3} \cdot \frac{5}{a^2} = \frac{10a}{3a^2} = \frac{10 \cdot a}{3a \cdot a} = \frac{10}{3a}$
- $\frac{2a}{3} \div \frac{5}{a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} \div \frac{15}{3a^2} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$ of $\frac{\frac{2a}{3}}{\frac{5}{a^2}} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$

Opgave 10

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{10}$

b $\frac{2}{7} / \frac{3}{10}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}$

d $\frac{2}{a} / \frac{1}{b}$

Opgave 11

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{3x} \cdot \frac{5}{2y}$

b $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}$

c $\frac{3}{5x} / \frac{2x}{5}$

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$

Verwerken

Opgave 12

Schrijf de formules zo eenvoudig mogelijk.

a $4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$

b $2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$

Opgave 13

Schrijf als één breuk.

a $\frac{3}{y} + \frac{5}{x}$

b $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x}$

c $\frac{2}{x} / \frac{3}{y}$

d $2x - \frac{1}{2x}$

e $\frac{10y}{7x} \cdot \frac{5}{6x}$

Opgave 14

Druk in de formules y uit in x . Schrijf ze daarna zo eenvoudig mogelijk.

a $x - 2y = 10$

b $(x + 2) \cdot y = 6$

c $x = 4 - y^2$

d $x \cdot y^2 = 4$

Opgave 15

Werk de haakjes weg en herleid.

- a $-3x(x + 2y)$
- b $-2x - (x^2 + 6x)$
- c $(t + 20)(t - 5)$
- d $(x^2 + 1)(3x - 2)$
- e $(a - 3)(a + 3)$
- f $(x - 2)^2$

Opgave 16

Ontbind in factoren.

- a $x^2 - 4x$
- b $-2t^2 + 18t$
- c $x^2 + 5x - 6$
- d $12 - 4p - p^2$
- e $q^3 + 4q^2 + 8q$

Opgave 17

In Nederland wordt de temperatuur in graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) uitgedrukt. In sommige andere landen gebruiken ze graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Met de formule $T_{\text{F}} = 1,8T_{\text{C}} + 32$, waarbij T_{C} de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is en T_{F} de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$, kun je uitrekenen wat de temperatuur in graden Fahrenheit is als je de temperatuur in graden Celsius weet.

- a Water kookt bij 100°C , hoeveel $^{\circ}\text{F}$ is dit?
- b Als je de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$ weet kun je met een formule gemakkelijk uitrekenen hoeveel $^{\circ}\text{C}$ dat is. Geef die formule door T_{C} uit te drukken in T_{F} .

Toepassen

Opgave 18: Een boswal aanleggen

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af en maakt daar een smalle boswal. Verder maakt hij een bredere boswal van 10 meter breed aan één van beide korte zijden. Zijn land wordt daarmee 2690 m^2 kleiner.

- a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (in meter). Hoe groot is de oppervlakte van dit land, uitgedrukt in x ?
- b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef deze oppervlakte als formule met haakjes.
- c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Opgave 19: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in meter.

- a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 meter. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?
- b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan berekenen als je de snelheid van de wind weet. Stel een formule op die D uitdrukt in v .
- c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt kunnen opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Testen

Opgave 20

Schrijf deze formules zo, dat y is uitgedrukt in x .

- a $4x - 4y = 12$
- b $x \cdot x + 4 \cdot y = 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x$
- c $2xy = 0,4x + 200$
- d $x - 4y^2 = 2$

Opgave 21

Schrijf als één breuk.

- a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$
- b $\frac{3}{4x} \div \frac{5}{2x}$
- c $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x}$
- d $\frac{4x}{7} \cdot \frac{3y}{2}$

Opgave 22

Om je schoenmaat te bepalen kun je de formule $s = 1,5(v + 2)$ gebruiken, hierbij is v de voetlengte in centimeters is en s de schoenmaat.

- a Welke schoenmaat hoort er bij een voetlengte van 25 centimeter?
- b Druk v uit in s en bepaal met deze formule wat de voetlengte moet zijn, bij een schoenmaat van 42.

Opgave 23

Werk eerst de haakjes uit en ontbind daarna in factoren.

- a $(x - 4)(x + 3) - 8$
- b $(x + 3)(x - 2) + 4x - 8$

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met variabelen en het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
