# 3.5 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Rijen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

- rij — termen van een rij — lineair verband — exponentieel verband
- recursie en recursieformule
- directe formule
- som van termen

## Activiteitenlijst

- rijen beschrijven — lineaire verbanden en exponentiële verbanden herkennen
- een rij beschrijven met een recursieformule
- een rij beschrijven met een directe formule
- werken met rijen en de grafische rekenmachine, o.a. de som van een aantal termen berekenen

## Achtergronden

**Leonardo van Pisa (1170—1250)** (bijgenaamd Fibonacci) was één der eersten die over rijen schreef. In zijn boek 'Liber Abaci' beschreef hij een model voor de ontwikkeling van een populatie konijnen.

Figuur 1

Hij ging uit van één paar konijnen, en nam aan:

- elk paar is na zijn tweede levensmaand volwassen;
- elke maand komt er per volwassen paar een paar jongen bij;
- er gaan geen konijnen dood.

De vraag die hij wilde beantwoorden was: hoeveel paren konijnen zijn er aan het eind van één jaar?

Het aantal konijnen dat je onder deze aannames per maand hebt geeft de rij:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,...
Dit is de beroemde **rij van Fibonacci**.
De bijbehorende recursieformule is $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ voor $n = 2,3,4,5,...$
Een bijpassende directe formule is niet eenvoudig te vinden, maar hij bestaat wel.

De rij van Fibonacci komt op veel plaatsen voor. Onder andere in de spiralen in de bloem van een zonnebloem en in de schubben op een dennenappel. Maar ook de beroemde 'Gulden Snede' heeft met de rij van Fibonacci te maken. Op het internet bestaan heel veel sites over deze rij, zoek maar eens.

## Testen

### Opgave 1

Gegeven is de rij $u_n$ waarbij de regelmaat +6 is.
De vierde term in de rij is 55.

**a** Vormen de termen in rij $u_n$ een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.

**b** Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.

**c** Bepaal $u(8)$.

**d** Stel een directe formule en een recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

## Opgave 2

Gegeven is de rij $u_n$ waarbij de regelmaat $\times\frac{1}{4}$ is.

De derde term in de rij is 10000.

**a** Vormen de termen in rij $u_n$ een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.

**b** Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 1.

**c** Bepaal $u(9)$. Rond af op twee decimalen.

**d** Stel een directe formule en een recursieve formule op. Begin de nummering bij $n = 1$.

## Opgave 3

Gegeven zijn de rijen $a(n)$: 7, 14, 28, 56, 112,... en $b(n)$: 5, 8, 11, 14, 17,...

**a** Vormen de termen in rijen $a(n)$ en $b(n)$ een lineair verband of een exponentieel verband? Licht je antwoord toe.

**b** Stel bij beide rijen zowel de directe formule als de recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

**c** Bereken de som van de eerste honderd termen van rij $b(n)$.

## Opgave 4

De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door de directe formule $t_n = n^2 + n$.

**a** Schrijf de eerste tien termen op.

**b** Bepaal de kleinste $n$ waarvoor $t_n > 1000$.

## Opgave 5

Gegeven is de rij $A_n$: 8,12,16,20,24,... met $n = 0,1,2,3,\ldots$

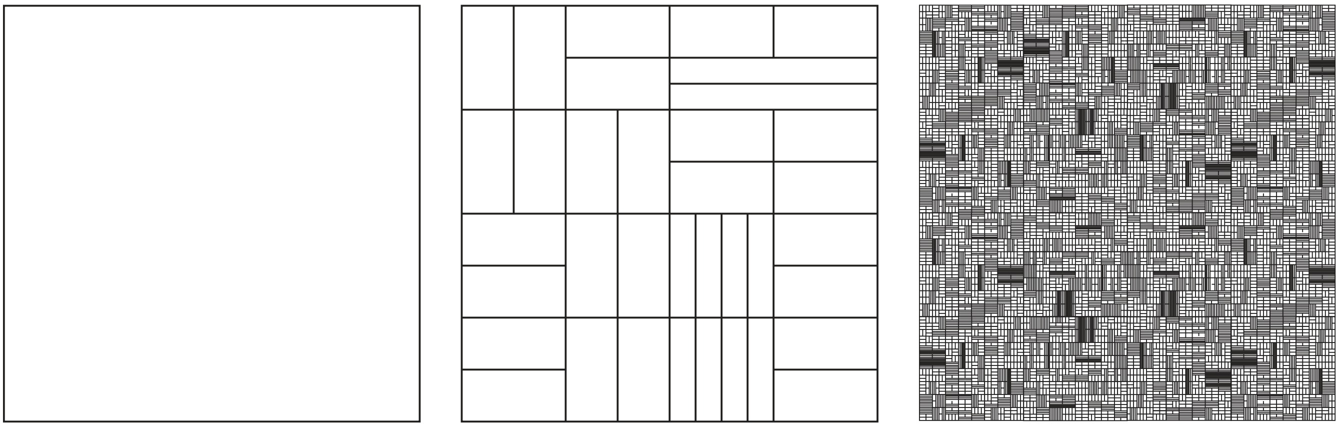
**a** Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?

**b** Stel een recursieformule voor $A_n$ op.

**c** Stel een directe formule voor $A_n$ op.

## Opgave 6

Bekijk de figuren met enkele delen van de totstandkoming van een kunstwerk van Pavel Rudolf.



$n = 0$ $n = 5$ $n = ?$

**Figuur 2**

Het kunstwerk is gemaakt volgens een bepaald proces: ‘halvering van vlakken’.
De kunstenaar is begonnen met een vierkant van 24 bij 24 centimeter: zie $n = 0$ in de figuur. Dat vierkant heeft hij in twee even grote rechthoeken verdeeld. Beide rechthoeken heeft hij weer in twee even grote delen verdeeld, enzovoort. Bij elke volgende fase heeft hij elke rechthoek (of vierkant) met een horizontale of een verticale lijn in twee gelijke delen verdeeld. De keuze voor een horizontale of verticale lijn is per rechthoek willekeurig door de kunstenaar gemaakt.
Er is zo een serie plaatjes ontstaan. Elk volgend plaatje bestaat uit steeds meer rechthoeken. Bij het tweede plaatje in de figuur hoort $n = 5$.

Voor het aantal rechthoeken $A_n$ in het $n$-de plaatje geldt de volgende recursieve formule:
$A_n = 2 \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = 1$.

**a** Het derde plaatje in de figuur (met $n = ?$) bestaat uit 8192 rechthoeken.
Bereken welke waarde van $n$ bij het derde plaatje in figuur 1 hoort.

**b** De oppervlakte per rechthoek wordt bij elke fase steeds kleiner. Ga weer uit van een vierkant van 24 bij 24 centimeter met $n = 0$.
Bereken vanaf welke waarde van $n$ de oppervlakte per rechthoek kleiner dan 1 $cm^2$ is.

**(naar: examen wiskunde C in 2012, eerste tijdvak)**

## Toepassen

### Opgave 7: Hypotheekvormen

Iemand wil € 240.000 lenen van een bank, om een huis te kopen of een zaak te beginnen. De bank wil 5% rente per jaar hebben en de lening moet in 30 jaar worden terugbetaald. Hoe ga je zo'n schuld aflossen? Twee bekende methoden zijn:

**Lineair afbetalingssysteem**

Een lineair afbetalingssysteem, waarbij je elk jaar $\frac{1}{30}$ ste deel van de schuld terugbetaald en jaarlijks rente betaalt over de nog uitstaande restschuld.
Stel je leent op 1-1-2010 ($t = 0$ in jaren) en je betaalt voor het eerst op 31-12-2010.

- Je betaalt dus op $t = 1$: $8000 + 0{,}05 \cdot 240000$ euro.
- Je betaalt op $t = 2$: $8000 + 0{,}05 \cdot 232000$ euro.

Enzovoorts...

In jaar $t$ betaal je: $B(t) = 8000 + 0{,}05 \cdot (240000 - 8000(t-1))$ euro. $B(t)$ is een rekenkundige rij, dus je berekent je totale kosten voor deze lening als de som van deze rij.

**Annuïteiten afbetalingssysteem**

Een afbetalingssysteem met annuïteiten, waarbij je elk jaar evenveel betaalt, rente en aflossing samen (in het begin veel rente en weinig aflossing, later andersom). Natuurlijk betaal je ook nu rente over je restschuld.
Noem de annuïteit $A$, je leent op 1-1-2010 en betaalt op 31-12 van elk jaar.

- Je restschuld op $t = 1$ is: $240000 \cdot 1{,}05 - A$ euro.
- Je restschuld op $t = 2$: $240000 \cdot 1{,}05^2 - A \cdot 1{,}05 - A$ euro.

Na $t$ jaar is je restschuld: $S(t) = 240000 \cdot 1{,}05^t - A \cdot 1{,}05^{t-1} - A \cdot 1{,}05^{t-2} - ... - A$. Je hebt alles afbetaald als dit samen 0 is. Hieruit bereken je de annuïteit en je totale kosten.

**a** Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je elk jaar evenveel aflossing en rente over de restschuld. Maak hierbij een tabel van jaarlijks te betalen bedragen en bereken het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

**b** Bij een afbetalingssysteem gebaseerd op annuïteiten betaal je elk jaar een vast bedrag. Bereken de grootte van dit bedrag en het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

## Examen

### Opgave 8: DISK

Een hobbycomputerclub geeft elke maand het tijdschrift DISK uit, waarop alleen eigen leden zich kunnen abonneren. Gedurende lange tijd is het aantal abonnees gelijk aan 90. Omdat de computerclub maar liefst 5400 leden telt, heeft men besloten een reclamecampagne te starten om meer leden te werven voor een abonnement op DISK. De campagne heeft succes: al na één maand zijn er 17 nieuwe abonnees, een maand later hebben zich weer nieuwe abonnees aangemeld en wel 21. De tabel geeft dit verloop voor de eerste maanden weer.

| $n$ (maandnummer) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_n$ (aantal nieuwe abonnees in deze maand) | | 17 | 21 | 25 | |
| $N_n$ (totale aantal abonnees na deze maand) | 90 | 107 | 128 | 153 | |

**Tabel 1**

De eerste drie maanden geldt voor $A_n$ de formule: $A_n = 4n + 13$. Neem aan dat deze formule ook geldt voor alle volgende maanden.

**a** Bereken het totale aantal abonnees na zes maanden.

**b** Met behulp van de formule voor $A_n$ kan een formule worden opgesteld voor het totale aantal abonnees $N_n$. Deze formule kan geschreven worden als $N_n = 2n^2 + b \cdot n + c$.

Bereken $b$ en $c$.

**c** Als het totale aantal abonnees zo blijft toenemen, zal DISK op zeker moment meer dan 1000 abonnees hebben.

Laat zien dat er dan na 18 maanden voor het eerst meer dan 1000 abonnees zullen zijn.

**(naar: examen vwo C in 2007, tweede tijdvak)**

## Opgave 9: Ureum-gehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per $m^3$ water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 $m^3$ bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 $m^3$ ververst wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

**a** Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.

**b** In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

**c** Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (notatie $U_n$) aan het begin van de $n$ de dag dag geldt $U_n = 0{,}8 \cdot U_{n-1} + 400$.

Hiermee wordt aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan. Maar in de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden.

**d** Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

**(bron: examen wiskunde A havo van voor 1990)**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.