

3.4 Werken met rijen

Inleiding

Als je echt met rijen wilt werken is een grafische rekenmachine erg nuttig. Nu ga je vooral zien hoe je dat kunt doen. Verder is het vaak handig om het totaal van alle termen van een rij samen te weten. Daarvoor bestaan formules die je niet echt hoeft te onthouden, maar waar je wel mee moet kunnen rekenen.

Je leert in dit onderwerp

- rijen nummeren vanaf 0 of vanaf 1;
- formules voor rijen invoeren op de grafische rekenmachine en ermee werken, zoals termen van de rij optellen.

Voorkennis

- werken met directe formules en recursieformules;
- grafieken van functies/rijen tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss**. Over hem gaat het verhaal dat hij als 11-jarig jongetje door zijn leraar de (in de ogen van de leraar) vervelende opdracht kreeg om de getallen 1 t/m 100 op te tellen. Waarop de kleine Carl na enig nadenken zei: "Het antwoord is 5050".

- Hoe vond hij dit zo snel uit zijn hoofd?
- En wat heeft dit met de titel van dit onderdeel te maken?



Figuur 1

Uitleg 1

In een theater zijn 35 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 30 stoelen, op de tweede rij 32, op de derde rij 34, enzovoort.

Er komen dus steeds twee stoelen per rij bij. Daarom vormen de aantallen stoelen per rij een rij met een lineair verband: 30, 32, 34, 36,...

Je kunt de rijen met stoelen nummeren vanaf 0 en daarbij formules opstellen voor het aantal stoelen a op rij n :

- recursieformule:
 $a_n = a_{n-1} + 2$ met $a_0 = 30$
- directe formule:
 $a_n = 30 + 2 \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$

Het ligt hier voor de hand om de nummering van de rij bij 1 te beginnen in plaats van bij 0, omdat de eerste rij stoelen dan hoort bij $n = 1$ en de tweede rij bij $n = 2$, enzovoort.

- recursieformule:
 $a_n = a_{n-1} + 2$ met $a_1 = 30$
- directe formule:
 $a_n = 30 + 2 \cdot (n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Je ziet dat de twee recursieformules gelijk zijn en dat alleen het nummer van de beginterm verschilt. De directe formule met nummering vanaf 1 verschilt op één plaats van de directe formule met nummering vanaf 0. Bij nummering vanaf 0 gebruik je n en bij nummering vanaf 1 gebruik je $n - 1$. Hetzelfde verschil geldt voor de directe formule van een rij met een exponentieel verband.

Opgave 1

Gebruik de informatie uit **Uitleg 1**.

- Waarom is het logischer om de nummering bij 1 te beginnen?
- Laat zien dat het aantal stoelen op rij 1 inderdaad 30 is met de formule: $a_n = 30 + 2(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
- Bereken met deze formule het aantal stoelen op rij 20.
- Hoe ziet de recursieformule er uit wanneer de nummering bij 0 begint?
- Stel de directe formule op wanneer de nummering bij 0 begint.
- Bereken met die formule ook het aantal stoelen op rij 20. Is het aantal hetzelfde als bij c?

Opgave 2

De rij v begint zo: ..., 4, -8, 16, -32, ...

- Geef de eerste term van v .
- Geef de recursieformule van v_n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Geef de recursieformule van v_n met $n = 1, 2, 3, \dots$
- Geef de directe formule van v_n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Geef de directe formule van v_n met $n = 1, 2, 3, \dots$

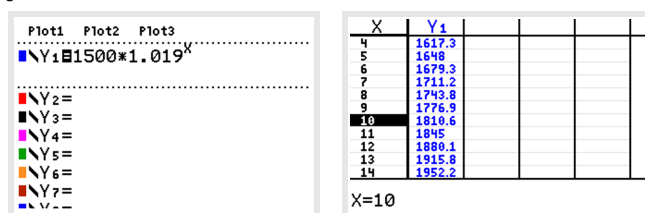
Uitleg 2

Sofie zet € 1500 op een bankrekening met 1,9% rente per jaar.

- Sofie stort geen geld meer op haar rekening. Wat is haar saldo na tien jaar?
- Sofie stort elk jaar € 500,00 op haar rekening. Wat is dan haar saldo na tien jaar?

Om het antwoord op de eerste vraag te vinden kun je een directe formule opstellen. Door deze in te voeren op de grafische rekenmachine is het antwoord af te lezen.

De directe formule is exponentieel met beginwaarde 1500 en groeifactor 1,019 per jaar, dus: $u_n = 1500 \cdot 1,019^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$ Voer deze formule in de grafische rekenmachine in en lees in de tabel de waarde voor $n = 10$ af. Als Sofie geen geld op haar rekening stort, is haar saldo na tien jaar: € 1810,60.

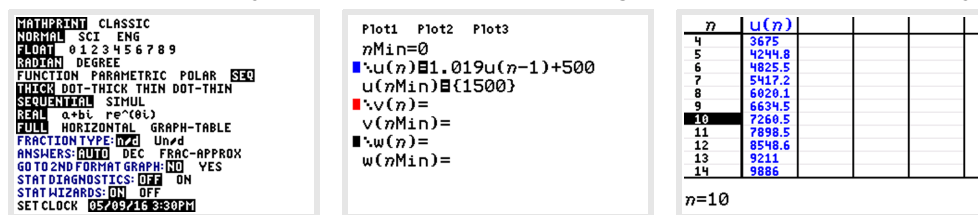


Figuur 2

Bij het antwoord op de tweede vraag is een recursieformule gemakkelijker op te stellen, omdat er sprake is van zowel een groeifactor als een lineair verband.

De recursieformule is: $u_n = 1,019 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 1500$.

Voor een recursieformule kun je ook de grafische rekenmachine gebruiken, bekijk het [Practicum](#). Je ziet: als Sofie elk jaar € 500,00 op haar rekening stort, is haar saldo na tien jaar: € 7260,50.



Figuur 3

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit [Uitleg 2](#).

- Ga uit van de situatie dat Sofie geen jaarlijkse stortingen doet. Wat is haar saldo na twintig jaar?
- Ga uit van de situatie dat Sofie jaarlijks € 500,00 stort. Wat is haar saldo na twintig jaar?

Opgave 4

Gerrit heeft op 1 januari 2020 € 100000 op een spaarrekening. De spaarrekening heeft een jaarrente van 2,8%. Aan het eind van ieder jaar haalt Gerrit er € 4000 af.

- Stel de recursieformule op, met n in jaar en $n = 0, 1, 2, \dots$
- In het hoeveelste jaar is het saldo voor het eerst negatief?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rijen zoals u_n kunnen op twee manieren genummerd worden: vanaf $n = 0$ of vanaf $n = 1$.

	recursieformule	directe formule
lineair verband nummering vanaf $n = 0$	$u_n = u_{n-1} + a$ met $u_0 = b$	$u_n = u_0 + a \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
lineair verband nummering vanaf $n = 1$	$u_n = u_{n-1} + a$ met $u_1 = b$	$u_n = u_1 + a \cdot (n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
exponentieel verband nummering vanaf $n = 0$	$u_n = u_{n-1} \cdot r$ met $u_0 = b$	$u_n = u_0 \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
exponentieel verband nummering vanaf $n = 1$	$u_n = u_{n-1} \cdot r$ met $u_1 = b$	$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Tabel 1

Een opgestelde formule voor een rij kun je invoeren op de grafische rekenmachine. Hiermee kun je bijvoorbeeld snel waarden aflezen, of vergelijkingen en ongelijkheden met rijen oplossen. Directe formules kun je vaak invoeren als functie van x . Maar voor het rekenen met rijen heb je op de grafische rekenmachine een speciale 'mode' of een speciaal menu. Bekijk in het [Practicum](#) hoe dat op de verschillende rekenmachines gaat.

Voorbeeld 1

Bekijk de rijen.

u : 78, 72, 66, 60, 54,...

v : 4, 12, 36, 108, 324,...

Geef voor beide rijen de directe formule en de recursieformule, met $n = 0, 1, 2, \dots$ en met $n = 1, 2, 3, \dots$

Antwoord

- Rij u is lineair met beginterm 78 en regelmaat -6 .
De directe formule voor u is:
 $u_n = 78 - 6n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$ of
 $u_n = 78 - 6(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
De recursieformule is:
 $u_n = u_{n-1} - 6$ met $u_0 = 78$ wanneer $n = 0, 1, 2, \dots$ of met $u_1 = 78$ wanneer $n = 1, 2, 3, \dots$
- Rij v is exponentieel met beginterm 4 en groeifactor 3.
De directe formule voor v is:
 $v_n = 4 \cdot 3^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
 $v_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
De recursieformule is:
 $v_n = v_{n-1} \cdot 3$ met $v_0 = 4$ wanneer $n = 0, 1, 2, \dots$ of met $v_1 = 4$ wanneer $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 5

Bekijk rij p : 12, 28, 44, 60, 76,...

Geef de directe formule en de recursieformule van p , met $n = 0, 1, 2, \dots$ en ook met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 6

Bekijk rij q : 1202; 601; 300,5; 150,25; 75,125; ...

Geef de directe formule en de recursieformule van q , met $n = 0, 1, 2, \dots$ en ook met $n = 1, 2, 3, \dots$

Voorbeeld 2

Verzekeringsmaatschappijen A en B bieden allebei een zorgverzekering. De verzekering van maatschappij A kost € 85,00 en die van B € 90,00. De prijs neemt bij beide verzekeraars jaarlijks toe. De prijs van A lineair met € 2,00 per jaar, de andere prijs exponentieel met 1,6% per jaar.

Stel een formule op voor de prijs van de zorgverzekering bij maatschappij A en B, en verantwoord de keuze voor de nummering van de rijen. De zorgverzekering bij maatschappij A is in eerste instantie goedkoper. Na verloop van tijd is deze verzekering duurder. Na hoeveel jaar is de zorgverzekering bij maatschappij A weer voordeliger dan die bij B?

Antwoord

Bij verzekeringsmaatschappij A noem je de rij jaarlijkse prijzen a , en bij B noem je die b . De directe formules zijn:

$$a_n = 85 + 2n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 90 \cdot 1,016^n \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots$$

Tel vanaf $n = 0$, zodat je goed uitkomt met de uitspraak: 'De prijs na n jaar is...'

Voer beide rijen in op de grafische rekenmachine en bekijk de tabel. Hieruit blijkt dat $a_n < b_n$ voor $n \geq 31$. Na 31 jaar is zorgverzekering A weer voordeliger dan B.

Je kunt ook werken met de recursieformules:

$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ met } a_0 = 85 \text{ (of } a_1 = 85 \text{ als je vanaf } n = 1 \text{ wilt tellen)}$$

$$b_n = 1,016b_{n-1} \text{ met } b_0 = 90 \text{ (of } b_1 = 90)$$

Hier is alleen de invoer anders; de tabel is verder hetzelfde.

Opgave 7

Verzekeringsmaatschappij C biedt een zorgverzekering aan met een premie van € 88,00. Jaarlijks wordt de prijs verhoogd. Dit doen ze door de premie met 2,7% te laten toenemen, maar er daarna ook weer € 1,50 van af te trekken.

Onderzoek na hoeveel jaar de premie duurder is dan € 100,00.

Opgave 8

Voor een experiment nemen Willem en Linda een groot vel papier van 1 m^2 . Willem knipt dit meteen in twee helften. Vervolgens neemt hij één van de helften, en halveert deze weer. Zo gaat hij alsmaar door. Intussen houdt Linda twee rijen bij. Rij p is de oppervlakte van één van de helften papier die Willem in zijn handen heeft (m^2), en rij q is het aantal stukken papier dat er in totaal ligt.

- Stel een directe formule op voor p en q en licht je keuze voor de nummering toe.
- Na hoeveel keer knippen is de oppervlakte van één van de velletjes kleiner dan 1 cm^2 ?
- Na hoeveel keer knippen is de gemiddelde oppervlakte van alle velletjes kleiner dan $0,23 \text{ m}^2$?

Voorbeeld 3

Er zijn situaties waarbij je een deel van de termen van een rij bij elkaar wilt optellen. Bijvoorbeeld bij het berekenen van een geldsom die bestaat uit een aantal betalingen met rente. Je grafische rekenmachine kan dit voor je doen, bekijk het [Practicum](#).

Bekijk de rijen:

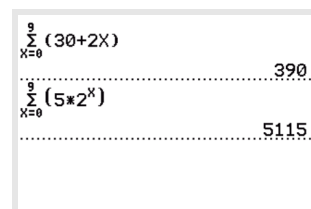
p : 30, 32, 34, 36, ...

q : 5, 10, 20, 40, ...

Bereken voor beide rijen de som van de eerste tien termen.

Antwoord

- Rij p heeft een lineair verband. De regelmaat is $+2$ en de beginterm is 30.
De termen van rij p zijn te beschrijven met:
 $p_n = 30 + 2n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
Voor de gevraagde som moet je de termen vanaf $n = 0$ tot en met $n = 9$ optellen.
De grafische rekenmachine geeft 390.
- Rij q heeft een exponentieel verband. De groeifactor is 2 en de beginterm is 5.
De termen van rij q zijn te beschrijven met:
 $q_n = 5 \cdot 2^n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$
Voor de gevraagde som moet je de termen vanaf $n = 0$ tot en met $n = 9$ optellen.
De grafische rekenmachine geeft 5115.



Figuur 4

Opgave 9

In [Voorbeeld 3](#) zie je hoe je met de grafische rekenmachine de som van een aantal termen van een rij kunt bepalen.

- Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \dots + 900$.
- Bereken $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$.
- Bereken $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 128$.

Opgave 10

Voor hun hypotheek betalen Robin en Fleur een maandelijks bedrag. Dit bedrag neemt iedere maand met een bepaald percentage af, omdat de hypotheekschuld ook steeds kleiner wordt. De eerste maand betalen ze € 900,00; dit bedrag neemt maandelijks met 0,3% af. Zo betalen ze hun hypotheek in de loop van dertig jaar af.

Wat is het totale bedrag dat Robin en Fleur betaald hebben?

Verwerken

Opgave 11

Geef bij de formules de eerste vijf termen van de bijbehorende rij.

- a $u_n = 66 - 12n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
- b $v_n = 152 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 12

Stel bij de rijen een recursieformule op met $n = 1, 2, 3, \dots$

- a p : 199, 405, 611, 817, ...
- b q : 5; 9; 16, 2; 29, 16; ...

Opgave 13

Bekijk de rijen u , v en w .

- u : 11, 5, -1, -7, ...
- v : 4, 12, 36, 108, ...
- w : 5, -5, 5, -5, ...

- a Geef directe formules voor u_n , v_n en w_n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Geef directe formules voor u_n , v_n en w_n met $n = 1, 2, 3, \dots$

Opgave 14

In een stad worden huizen gebouwd. Daardoor ontstaan woonplekken: een woonplek is een vestigingsplek voor één individu. Noem het totale aantal woonplekken in de stad over de loop van de jaren W_t en het aantal inwoners I_t . Zowel W_t als I_t zijn in duizendtallen, en t is in tientallen jaren. $W_0 = 30$ en $I_0 = 30$. Elke tien jaar groeit de huisvesting in de stad met 5000 woonplekken, en de bevolking groeit elke tien jaar met 9%. Stel dat $t = 0$ in 1900, in welk jaar raakt de stad dan overbevolkt?

Opgave 15

In een theater zijn 30 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 40 stoelen, op de tweede rij 42, op de derde rij 44, enzovoort. Het aantal stoelen A op rij n is te berekenen met de formule $A(n) = 40 + 2(n - 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$
Hoeveel stoelen staan er in dit theater?

Opgave 16

Johan koopt een huis voor € 240000. Hij sluit daarvoor bij een bank een hypotheek af. Hij spreekt met de bank af dat hij deze hypotheek in dertig jaar volledig aflost in even grote bedragen per jaar. Daarbovenop moet hij de bank jaarlijks rente betalen over zijn schuld die hij dat jaar nog heeft. Het rentepercentage wordt voor dertig jaar vastgezet op 4%. Het moment waarop hij het geld leent is $t = 0$, met t in jaar, en zijn aflossing begint een jaar later.

- a Hoeveel moet Johan op $t = 1$ aan de bank betalen aan aflossing en rente?
- b Hoe groot is dat bedrag op $t = 2$? En op $t = 3$?
- c Waarom heet dit een lineaire hypotheek?
- d Stel een directe formule op voor de te betalen bedragen per jaar B_t .
- e Bereken hoeveel Johan in totaal aan de bank betaalt voor zijn huis.

Toepassen

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, was een Italiaans wiskundige in de renaissance. Zijn bekendste vondst is de zogenoemde 'rij van Fibonacci', een rij waarbij elke term ontstaat door de voorgaande twee op te tellen.

De recursieformule die de rij van Fibonacci beschrijft is: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ met $F_0 = F_1 = 1$.

Hier zie je hoe je zo'n rij kunt invoeren in de grafische rekenmachine. Let op het invoeren van de beginwaarden.

Je kunt nu de rij $Q_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ met $n \geq 1$ bekijken.

Merk op dat Q_n steeds dichterbij een bepaalde waarde komt te liggen, naarmate n groter wordt.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+u(n-2)
u(nMin)=1,1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=

```

Figuur 5

Opgave 17: De rij van Fibonacci

- Voer de recursieformule voor de rij van Fibonacci in op de grafische rekenmachine en bereken de eerste acht termen.
- Bereken ook F_{10} , F_{20} en F_{30} .
Bekijk de rij $Q_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ met $n \geq 1$.
- Bereken van Q_n de eerste zeven termen.
- Bereken $Q_{10} = \frac{F_{10}}{F_9}$, $Q_{20} = \frac{F_{20}}{F_{19}}$ en $Q_{30} = \frac{F_{30}}{F_{29}}$. Rond af op drie decimalen.
Welk beroemde getal lijkt de rij Q_n te benaderen?

Opgave 18: De somformule van Gauss

Je hebt gezien dat je grafische rekenmachine de termen van een rij voor je kan optellen. Maar bij rijen met een lineair verband bestaat daarvoor een formule.

Stel je voor dat je $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ wilt berekenen.

- Zet de optelling twee keer in tegengestelde volgorde onder elkaar en tel ze op:

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 97 + 100 \\
 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 + \\
 \hline
 \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots
 \end{array}$$
 Welke uitkomsten vind je onder de optelstreep?
- Bedenk dat je bij a alle termen dubbel hebt geteld.
Hoe bereken je nu de som van de rij?
- Bekijk de formule: som = $\frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term).
Leg uit waarom deze formule past bij de berekening bij a en b.
- Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \dots + 900$.

Testen

Opgave 19

Bereken $1024 + 1022 + 1020 + \dots + 4 + 2$.

Opgave 20

Iemand huurt een appartement voor € 6600,00 per jaar. Jaarlijks wordt de huur met 1,5% verhoogd.

- a Geef een recursieformule voor de rij $H(t)$ van zijn/haar jaarlijkse huurbedragen.
- b Geef ook een directe formule voor deze jaarlijkse huurbedragen.
- c Hoeveel bedragen de totale huurkosten over de eerste 10 jaar?

Opgave 21

Samir koopt een nieuwe PC. Hij leent daartoe op 1 januari 2010 € 800 van de bank. Hij moet dit terugbetalen in 16 maandelijkse termijnen. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

- a Hoeveel moet hij op 1 maart 2010 aan de bank betalen?
- b Stel voor de rij met te betalen bedragen een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010 en geef aan welke waarden t aanneemt.
- c Bereken hoeveel Samir in totaal aan de bank betaalt voor zijn PC.

Practicum

In de volgende practica kun je zien hoe je **rijen** op de grafische rekenmachine kunt invoeren als je een recursieformule of een directe formule hebt. Bekijk alleen de onderdelen die gaan over rijen met directe formules en recursief gegeven rijen. Bekijk vooral ook hoe je de termen van een rij kunt optellen.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
