

3.3 Directe formules

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijdrage, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.

Je hebt tot nu toe gezien hoe je deze aantallen door middel van recursie kunt opbouwen vanuit een startbedrag. Maar liever wil je een formule die direct het aantal op een bepaald moment geeft.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- termen van een rij via een directe formule berekenen;
- rijen met een lineair verband en rijen met een exponentieel verband beschrijven met een directe formule.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2021 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld in een oude sok te bewaren. Verder stop je daar aan het begin van elke maand 50 euro bij in, te beginnen op 1 februari 2021. Je haalt voorlopig geen geld uit je sok en je stopt er ook geen andere bedragen in.

- a** Hoe hoog is je saldo na 40 storting?

Je hebt op 1 januari 2021 een saldo van € 1240,00.

En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten tegen 0,1% rente per maand, die voor het eerst op 1 februari 2021 wordt bijgeschreven. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je stort er ook geen andere bedragen op.

- b** Hoe hoog is je saldo na 40 maanden?

Uitleg

Bekijk de rijen getallen:

u : 2880, 2940, 3000, 3060, 3120, 3180,...

a : 4, 12, 36, 108, 324, 972,...

Alle termen kunnen berekend worden vanuit de voorgaande term. Door de letter n te nemen voor het nummer van de gevraagde term, ontstaat een algemene formule.

Voor rij u met een lineair verband geldt:

$$u_0 = 2880$$

$$u_1 = u_0 + 60 = 2880 + 60 = 2940$$

$$u_2 = u_1 + 60 = (2880 + 60) + 60 = 2880 + 2 \cdot 60 = 2880 + 120 = 3000$$

$$u_3 = u_2 + 60 = (2880 + 2 \cdot 60) + 60 = 2880 + 3 \cdot 60 = 2880 + 180 = 3060$$

...

$$u_n = 2880 + n \cdot 60 = 2880 + 60n$$

Voor rij a met een exponentieel verband geldt:

$$a_0 = 4$$

$$a_1 = a_0 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$a_2 = a_1 \cdot 3 = (4 \cdot 3) \cdot 3 = 4 \cdot 3^2 = 36$$

$$a_3 = a_2 \cdot 3 = (4 \cdot 3^2) \cdot 3 = 4 \cdot 3^3 = 108$$

...

$$a_n = 4 \cdot 3^n$$

De vorige term hoeft niet bekend te zijn om de volgende te berekenen. Alleen de eerste term u_0 is nodig. De formule $u_n = 2880 + 60n$ en $a_n = 4 \cdot 3^n$ heten 'directe formules'. Met alleen de eerste term kan direct iedere andere term berekend worden.

Je kunt met de directe formule heel snel de honderdste term berekenen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je bij rijen die een lineair of een exponentieel verband beschrijven een directe formule kunt maken.

- a Wat is het voordeel van een directe formule?
- b Bereken de honderdste term u_{99} .
- c Bereken de honderdste term a_{99} .

Opgave 2

Gegeven is de rij u : 5, 7, 9, 11, 13, ...

- a Stel een directe formule op voor deze rij.
- b Bereken u_{80} .

Gegeven is de rij v : 2, 10, 50, 250, 1250, ...

- c Stel een directe formule op voor deze rij.
- d Bereken a_{12} .

Opgave 3

Bekijk de volgende rijen:

- u : 455, 451, 447, 443, 439, 435, ...
- a : 3, -6, 12, -24, 48, -96, ...

- a Stel directe formules op voor beide rijen.
- b Bereken van beide rijen de zevende term.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Naast een recursieformule om de regelmaat in een rij weer te geven, kan de rij vaak ook beschreven worden met een **directe formule**, waarmee elke term direct berekend kan worden.

De algemene directe formule voor een rij met een lineair verband met beginterm u_0 en regelmaat $+a$ is: $u_n = u_0 + a \cdot n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Voor een rij met een exponentieel verband met beginterm v_0 en regelmaat $\times r$ is de algemene formule: $v_n = v_0 \cdot r^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Het getal r heet de **reden** van de exponentiële rij.

Opmerkingen:

1. Net als bij recursieformules begin je de formule soms niet bij $n = 0$, maar bij $n = 1$.
2. Als u_0 de eerste term is, is u_{10} de elfde term.

Voorbeeld 1

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 4, 7, 13, 22,...
- rij v : 4, 8, 16, 32,...
- rij w : 4, 7, 10, 13,...

Welke van deze rijen is een rij met een lineair verband? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

De enige rij met een herhalend verschil tussen de termen is w , dat is de enige lineaire rij.

Bepaal de directe formule voor rij w door vast te stellen dat:

- $w(0) = 4$
- Het verschil tussen twee opvolgende termen steeds $+3$ is.

De gevraagde directe formule is: $w(n) = 4 + 3n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 4

Welke van de rijen hebben een lineair verband? Geef van elke rij met een lineair verband de directe formule, beginnend bij $n = 0$.

- a** 5, 3, 1, -1,...
- b** 12, 24, 48, 96,...
- c** 1, -1, 1, -1,...
- d** 1, 1, 2, 3,...
- e** 1, 4, 16, 64,...
- f** 2, 5, 8, 11,...

Voorbeeld 2

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u : 4, 7, 13, 22,...
- rij v : 4, 8, 16, 32,...
- rij w : 4, 7, 10, 13,...

Welke van deze rijen is een rij met een exponentieel verband? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

De enige rij met een vaste reden is rij v , dat is de enige exponentiële rij. Ga na dat $32 : 16 = 16 : 8 = 8 : 4 = 2$.

Bepaal de directe formule voor rij v door vast te stellen dat:

- $v(0) = 4$
- de reden is $r = 2$

De gevraagde directe formule wordt: $v(n) = 4 \cdot 2^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Opgave 5

Welke van de rijen hebben een exponentieel verband? Geef van elke rij met een exponentieel verband de directe formule, beginnend bij $n = 0$.

- a** 5, 3, 1, -1,...
- b** 12, 24, 48, 96,...
- c** 1, -3, 9, -27,...
- d** 1, 1, 2, 3,...

- e 1, 4, 16, 64,...
- f 2, 5, 8, 11,...

Opgave 6

Celdeling is het biologische proces waardoor cellen zich vermenigvuldigen. Als je begint met één cel die zich in tweeën splitst, dan zijn er twee cellen. Beide cellen splitsen zich vervolgens weer in tweeën, dan zijn er vier. Dit herhaalt zich zodat je acht cellen krijgt, dan zestien, enzovoort. Stel dat celsplitsing eens per dag plaatsvindt.

- a Er is hier sprake van een rij die beschreven wordt met een exponentieel verband. Geef de directe formule voor het aantal cellen a_n per dag, met $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (De eerste dag krijgt nummer 0.)
- b Hoeveel cellen zijn er op de dertigste dag?

Verwerken

Opgave 7

Bekijk de rij 55, 42, 29, 16, 3, ... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Schrijf de volgende vijf termen op.
- b Beschrijf de rij met een directe formule.

Opgave 8

Bekijk de rij 0,5; -1,5; 4,5; -13,5; 40,5; ... met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- a Schrijf de tiende term op.
- b Beschrijf de rij met een directe formule.

Opgave 9

Bekijk de rijen. Het begin is gegeven. Stel directe formules op. Begin de nummering bij $n = 0$.

- a u : 5, 10, 15, 20, ...
- b v : 6561, 2187, 729, 243, ...
- c w : 3, -3, 3, -3, ...

Opgave 10

Van een rij met een lineair verband is de negende term 35 en de zeventiende term 99. Bepaal een directe formule voor de rij. Geef de nummering aan.

Opgave 11

Gegeven is de recursieformule $u(n) = u(n-1) - 35$ met $u(0) = 663$.

Schrijf de recursieformule als directe formule en bereken de vijfde, tiende en vijftiende term. Schrijf de berekeningen op.

Opgave 12

Marieke zet geld op een spaarrekening. Op deze rekening ontvangt ze 2,5% rente. Deze rente wordt na elk jaar verrekend. Stel dat Marieke c euro op haar rekening zet en het daar laat staan zonder iets te storten of op te nemen. De rij R geeft het verloop van het bedrag op de spaarrekening weer, met R_n het bedrag na n jaar.

- a Geef een directe formule (in termen van c) voor het verloop van R_n , met $n = 0, 1, 2, \dots$
- b Neem $c = 1500$. Marieke haalt aan het begin van het tiende jaar al het geld van de rekening. Wat is haar winst?

Opgave 13

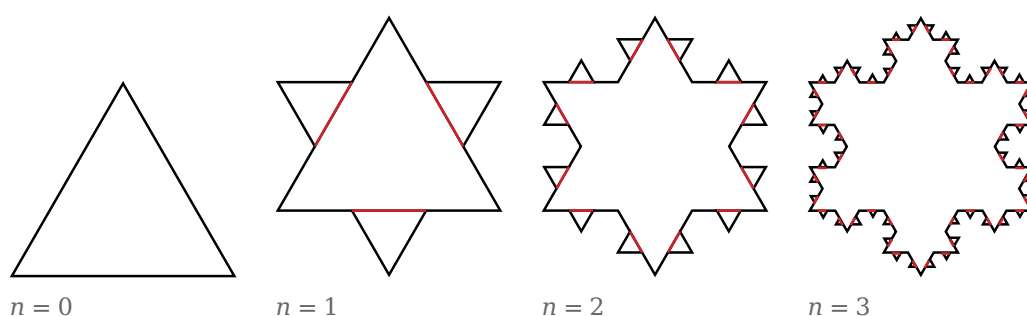
Anton en Bert huren elk een winkelpand. In 2012 moesten ze beiden € 20000 per jaar aan huur betalen. De huur voor Anton wordt jaarlijks verhoogd met € 1000; die van Bert wordt jaarlijks verhoogd met 4%.

- Stel een directe formule op voor de huur a_n van Anton in jaar n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Stel een directe formule op voor de huur b_n van Bert in jaar n met $n = 0, 1, 2, \dots$
- Wie betaalt er in 2024 de meeste huur?

Toepassen

Opgave 14: De Koch sneeuwvlok

Bekijk de figuur met de eerste vier stappen in het maken van een zogenaamde 'Koch sneeuwvlok'. Deze vorm is één van de eerste 'fractals' die door de wiskundige **Helge von Koch (1870–1924)** beschreven werd. Een fractal is een vorm met een herhalend patroon dat er altijd hetzelfde uitziet.



Figuur 2

In dit geval begin je met een gelijkzijdige driehoek, en voeg je aan iedere zijde een kleinere gelijkzijdige driehoek toe. Als je oneindig lang doorgaat met kleinere driehoekjes toevoegen (zoals je in de figuur een paar stappen ziet gebeuren), zal het patroon tot in de oneindigheid op dezelfde manier doorgaan.

Bekijk de figuur met $n = 0$ bij de eerste stap, $n = 1$ bij de tweede stap, enzovoort. Stel dat de gelijkzijdige driehoek bij $n = 0$ zijden van lengte 1 heeft. De toegevoegde driehoekjes hebben telkens een zijde van $\frac{1}{3}$ de lengte van de grotere driehoek waar ze aan bevestigd worden.

- De lengte van een zijde van de sneeuwvlok na n stappen beschrijft een rij met een regelmaat. Noem de lengte van een zijde van de sneeuwvlok na n stappen Z_n . Geef de eerste vier termen van Z_n .
- Geef een directe formule voor Z_n .
- Noem het aantal zijden van de sneeuwvlok na n stappen a_n . Geef de eerste vier termen van a_n .
- Geef een directe formule voor a_n .
De omtrek van de Koch sneeuwvlok is A_n .
- Geef een directe formule voor A_n .
De oppervlakte van de Koch sneeuwvlok wordt niet oneindig groot.
- Leg uit, waarom de omtrek wel oneindig groot wordt.

Testen

Opgave 15

De rij $t_0, t_1, t_2, \dots$ is gegeven door de directe formule $t_n = 1 + 2n$.

- a** Schrijf de eerste twaalf termen op.
- b** Hoeveel bedraagt de 100-ste term?
- c** Aan welke recursieformule voldoet deze rij?

Opgave 16

Gegeven is de rij u : 10, 13, 16, 19, 22,...

- a** Geef een bijpassende directe formule.
- b** Bereken de honderdste term.

Gegeven is de rij v : 100; 20; 4; ; 0,8; ...

- c** Geef een bijpassende directe formule.
- d** Bereken de tiende term.



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
