3.2 Recursie

Inleiding

Vaak heb je bij het voorspellen van groei- en vervalprocessen te maken met 'losse' getallen. Denk maar aan het saldo van een spaarrekening met een maandelijkse rentebijschrijving, de wekelijkse tellingen van een bepaald soort vogels, etc.
Vooral het berekenen van het saldo op je spaarrekening is natuurlijk van groot belang...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- rijen met een lineair verband beschrijven met een recursieformule en handmatig termen berekenen;
- rijen met een exponentieel verband beschrijven met een recursieformule en handmatig termen berekenen.

Voorkennis

- werken met formules voor rijen en de bijbehorende nummering.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een saldo van € 1240,00 en je besluit dat geld op 1 januari 2021 een spaarrekening te zetten. Verder ga je aan het begin van elke maand 50 euro naar die spaarrekening overmaken vanaf 1 februari 2021. Je krijgt aan het eind van elke maand rente van 0,5% over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

a Hoe bereken je het saldo vanuit dat van een maand eerder?

b Hoe hoog is je saldo op 1 januari 2022?

c Wanneer is je saldo meer dan € 3000,00?

Uitleg 1

Bekijk de rij u: 2880, 2940, 3000, 3060, 3120, 3180,...
De rij begint bij 2880 en er wordt steeds 60 bij opgeteld. Deze rij is lineair. Als de nummering van de termen begint bij 0 dan is $u_0 = 2880$.
Je berekent u_1 door 60 bij u_0 op te tellen: $u_1 = u_0 + 60 = 2880 + 60 = 2940$.
Je berekent u_2 door 60 op te tellen bij u_1: $u_2 = u_1 + 60 = 2940 + 60 = 3000$.
Je berekent u_n door 60 op te tellen bij u_{n-1}: $u_n = u_{n-1} + 60$.

Een formule zoals $u_n = u_{n-1} + a$ of $u(n) = u(n-1) + a$ is een voorbeeld van een recursieformule. Recursie betekent zoiets als 'doorrekenen vanuit de vorige term'.

Je berekent u_3 met behulp van de recursieformule uit u_2:
$u_3 = u_{3-1} + 60 = u_2 + 60 = 3000 + 60 = 3060$

Een recursieformule heeft wel een 'beginterm' u_0 of u_1 nodig (het ligt eraan of de nummering bij $n = 0$ of $n = 1$ begint). Voor het berekenen van termen bij hoge waarden van n zal al gauw een computer (zoals een grafische rekenmachine) nodig zijn.

Opgave 1

a Waarom is in **Uitleg 1** u_n een rij met een lineair verband?

b Gebruik de recursieformule om u_4 te berekenen.

c Gebruik de recursieformule om u_6 te berekenen.

d Waarom is het niet handig om met de recursieformule handmatig de honderdste term te berekenen?

Opgave 2

Gegeven is de rij u: 604, 590, 576, 562, 548, 534,...
De recursieformule voor u_n is: $u_n = u_{n-1} - 14$.
Hierbij begint de nummering bij $n = 0$, met $u_0 = 604$.

a Bereken u_3.

b Bereken u_6.

Uitleg 2

Bekijk de rij v: 4, 12, 36, 108, 324, 972,...
De rij begint bij 4 en er wordt steeds vermenigvuldigd met 3. Deze rij is exponentieel.
Als de nummering van de termen begint bij 0 dan is $v_0 = 4$.
Je berekent v_1 door v_0 met 3 te vermenigvuldigen: $v_1 = v_0 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$.
Je berekent v_2 door v_1 met 3 te vermenigvuldigen: $v_2 = v_1 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$.
Je berekent v_n door v_{n-1} met 3 te vermenigvuldigen: $v_n = v_{n-1} \cdot 3$.

Ook een formule zoals $v_n = v_{n-1} \cdot r$ of $v(n) = v(n-1) \cdot r$ is een recursieformule. De factor r heet de ‘reden’ van de rij. Hierbij kan r groter dan 1 zijn (de termen worden groter), tussen 0 en 1 liggen (de termen worden kleiner) of negatief zijn (dan springen de termen heen en weer van positief naar negatief). Ook hierbij is een beginterm nodig.

Je kunt v_3 berekenen met behulp van de recursieformule:
$v_3 = v_{3-1} \cdot 3 = v_2 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108$.

Soms wordt in plaats van recursieformule wel van een ‘recursieve formule’ gesproken.

Opgave 3

a Waarom is in **Uitleg 2** v_n een rij met een exponentieel verband?

b Gegeven is de rij v_n: 3,6,12,24,48,96,... met $v_0 = 3$.
Stel de recursieformule op voor v_n en bereken daarmee v_6.

Opgave 4

Gegeven is de rij v_n : 256,128,64,32,16,8,... en $v_0 = 256$.

a Stel de recursieformule voor v_n op.

b Bereken v_6.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je beschrijft een rij met een **recursieformule** (soms wordt ‘recursieve formule’ gebruikt) om de regelmaat goed weer te geven. Daarmee kan de volgende term alleen berekend worden als de vorige term bekend is. Daarom moet er altijd een beginwaarde bij de formule gegeven zijn. De nummering kan starten bij 0 of bij 1. Dit wordt altijd aangegeven.

Bij een rij met een lineair verband ontstaat elke term door bij de vorige term een vaste toename a op te tellen.
De algemene recursieformule voor een rij met een lineair verband is:
$u_n = u_{n-1} + a$ of ook wel $u(n) = u(n-1) + a$.

Bij een rij met een exponentieel verband ontstaat elke term door bij de vorige term met een vast getal r (genaamd de ‘reden’ of de ‘groeifactor’) te vermenigvuldigen.
De algemene recursieformule voor een rij met een exponentieel verband is:
$u_n = u_{n-1} \cdot r$ of ook wel $u(n) = u(n-1) \cdot r$.

Voorbeeld 1

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u: 10, 15, 20, 25,...
- rij v: 10, 20, 40, 80,...
- rij w: 10, 40, 90, 160,...

Welke van deze rijen horen bij een lineair verband? Stel een daarbij passende recursieformule op, beginnend bij $n = 0$.

Antwoord

Bekijk de verschillen tussen de termen om te onderzoeken of de termen in de rij een lineair verband hebben. Als het verschil tussen de termen steeds eenzelfde getal is, is het een lineaire rij. Dit is alleen het geval bij rij u.

De recursieformule voor rij u is te vinden door vast te stellen:

- $u(0) = 10$
- Het verschil tussen twee opvolgende termen is steeds +5.

De recursieformule is: $u(n) = u(n-1) + 5$ met $u(0) = 10$.

Opgave 5

Welke van de rijen horen bij een lineair verband? Geef van elke rij met een lineair verband de recursieformule, beginnend bij $n = 0$.

a 5, 14, 23, 32, 41,...

b 320, 160, 80, 40,...

c 10, 2, -6, -14,...

d 1, 4, 9, 16,...

e 1, 3, 9, 27,...

f $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45,...$

Voorbeeld 2

Bekijk het begin van drie rijen:

- rij u: 10, 15, 20, 25,...
- rij v: 10, 20, 40, 80,...
- rij w: 10, 40, 90, 160,...

Welke van deze rijen horen bij een exponentieel verband? Stel een daarbij passende recursieformule op, beginnend bij $n = 0$.

Antwoord

Deel steeds een term door de vorige term om na te gaan of de termen in de rij een exponentieel verband hebben. Komt daar steeds hetzelfde getal r uit, dan is het een rij met een exponentieel verband. Hier is dat de rij v. Ga na dat $80 : 40 = 40 : 20 = 20 : 10 = 2$.

De recursieformule voor rij v is te vinden door vast te stellen:

- $v(0) = 10$
- De reden is $r = 2$.

De gevraagde recursieformule is: $v(n) = v(n-1) \cdot 2$ met $v(0) = 10$.

Opgave 6

Welke van de rijen horen bij een exponentieel verband? Geef van elke rij met een exponentieel verband de recursieformule, beginnend bij $n = 0$.

a 5, 14, 23, 32, 41,...

b 320, 160, 80, 40,...

c 10, 2, -6, -14,...

d 1, 4, 9, 16,...

e 1, 3, 9, 27,...

f 2, 6, 18, 54,...

g $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45, \ldots$

Opgave 7

Frank, wiskundig programmeur, maakt van een zich herhalend aan/uit-signaal (dus: aan, uit, aan, uit, ...) een rij s. ‘Aan’ geeft Frank waarde 1, en ‘uit’ geeft hij waarde -1.

a Veronderstel dat het signaal op ‘uit’ begint. Laat zien hoe s eruitziet. Is s een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband, of geen van beide?

b Geef een recursieformule voor de afzonderlijke termen s_n van rij s. Begin bij s_0.

Verwerken

Opgave 8

Bekijk de rij 2,5,8,11,14,... met $n = 0,1,2,3,\ldots$

a Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?

b Schrijf de volgende vijf termen op.

c Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 9

Bekijk de rij 2, 6, 18, 54, 162,... met $n = 0,1,2,3,\ldots$

a Is dit een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?

b Schrijf de tiende term op.

c Beschrijf de rij met een recursieformule.

Opgave 10

Van een aantal rijen met een bepaalde regelmaat is het begin gegeven. Stel telkens een recursieformule op. Begin de nummering bij $n = 0$.

a u: 6, 11, 16, 21,...

b v: 1024, 512, 256, 128, 64, 32,...

c w: 13, 8, 3, -2, -7,...

Opgave 11

Van een rij met een lineair verband is de derde term 10 en de zevende term 22. Bepaal een recursieformule voor de rij. Geef duidelijk de nummering aan.

Opgave 12

Sara zet een deel van haar geld op een spaarrekening. Op deze rekening krijgt ze 3,1% rente. Deze rente wordt elk jaar verrekend. Stel dat Sara c euro op haar rekening zet en het daar laat staan zonder er iets op te storten of van op te nemen. De rij R geeft het verloop van het bedrag op de spaarrekening weer, met R_n het bedrag na n jaar.

a Geef een recursieformule (in termen van c) voor het verloop van R_n, met $n = 0,1,2,...$

b Neem $c = 1000$. Sara haalt aan het begin van het vierde jaar al het geld van de rekening. Hoe groot is haar winst?

Opgave 13

Kim zet op 1 januari 2015 een bedrag van € 1240,00 op een spaarrekening. Ze maakt aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Ze krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Ze haalt geen geld van deze spaarrekening en ze doet ook geen andere stortingen.

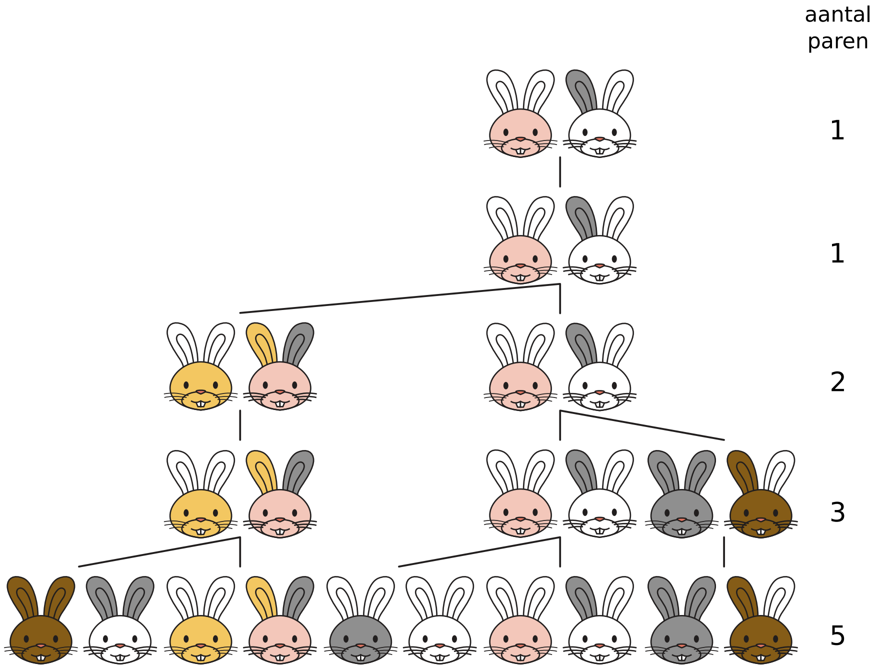
Stel een recursieformule op voor het saldo S met de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 1 januari 2015.

Toepassen

Opgave 14: De rij van Fibonacci (2)

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.
In zijn boek ‘Liber Abaci’ stelt Fibonacci een eenvoudige vraag:
“Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen zijn er dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?”

Schematisch ziet dat er als volgt uit:



Figuur 2

a Je neemt $a_0 = 1$. Hoe bereken je het aantal konijnenparen a_n?

b Welke recursieformule past bij deze rij?

c Bereken met de recursieformule het aantal konijnenparen als $n = 12$.

Opgave 15: Kikkerplaag

Bij een plas leven kikkers. Zonder invloeden van buitenaf zou de hoeveelheid kikkers jaarlijks verdubbelen.

a Stel dat er geen invloeden zijn van buitenaf. Op 1 januari 2016 zijn er 200 kikkers. Stel een recursieformule op voor de hoeveelheid kikkers per jaar $k(t)$, met $t = 0$ op 1 januari 2016.

b Als er meer dan 100000 kikkers zijn, is er sprake van een kikkerplaag. Aan het begin van welk jaar is er een kikkerplaag? Hoeveel kikkers zijn er dan?

Testen

Opgave 16

De rij $t_0, t_1, t_2, ...$ is gegeven door de recursieformule $t_n = t_{n-1} + 2$ met $t_0 = 1$.

a Schrijf de eerste twaalf termen op.

b Bereken de 100-ste term.

c Welk nummer heeft de term 299?

Opgave 17

Bij de volgende beginstukken van rijen ligt het vervolg voor de hand. Geef bij elk geval een recursieformule bij nummering vanaf 0.

a 4, 8, 12, 16, 20,...

b $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$

c $1, -2, 4, -8, 16, -32, ...$

d $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, ...$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.