

3.1 Regelmaat in rijen

Inleiding

Je kent ze wel: de rijtjes getallen met regelmaat er in.

Soms is de regelmaat eenvoudig: er komt steeds hetzelfde bij, of er wordt steeds met hetzelfde vermenigvuldigd. Maar dat hoeft echt niet altijd zo te zijn. Bekijk deze 'rij van Fibonacci' maar eens: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33,....

Heb je door wat hier gebeurt? Misschien moet je het maar eens aan een konijn vragen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rij en de getallen in een rij nummeren;
- regelmaat in rijen met een lineair of een exponentieel verband bepalen.

Voorkennis

- grafieken van functies tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Stel, twee werknemers verdienen bij twee verschillende bedrijven allebei € 30000 per jaar (in jaar 1). Bij bedrijf A heeft de vakbond een loonsverhoging van 2% per jaar bedongen. Bij bedrijf B krijgen de medewerkers een loonsverhoging van € 700 per jaar. In beide gevallen gaan de werknemers er elk jaar op vooruit.

Bereken bij welke werkgever de werknemer per jaar het meest verdient na vijf jaar. Bereken ook wie er in die vijf jaar het meest heeft verdiend.

Uitleg 1

Een serie getallen waarin regelmaat voorkomt heet een rij. Bekijk deze rijen maar eens.

- ...,3, 7, 11, 15, 19,...
- ...,77, 70, 63, 56, 49,...
- ...,32, 64, 128, 256, 512,...
- ...,1458, 486, 162, 54, 18,...

Ieder getal in de rij heet een term. De eerste rij heeft een regelmaat van +4: bij iedere term wordt 4 opgeteld. De tweede rij heeft een regelmaat van -7, de derde rij heeft een regelmaat van $\times 2$ en de vierde rij heeft een regelmaat van $\times \frac{1}{3}$ of : 3.

Een rij met opeenvolgende termen waarbij een vast getal opgeteld of afgetrokken wordt, is een rij met een lineair verband. Een rij met opeenvolgende termen die met een vaste factor vermenigvuldigd of gedeeld wordt, is een rij met een exponentieel verband.

Als je de regelmaat weet, kun je vooruitrekenen. Bijvoorbeeld naar de volgende drie termen:

- ...,3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31,...
- ...,77, 70, 63, 56, 49, 42, 35, 28,...
- ...,32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096,...
- ...,1458, 486, 162, 54, 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$,...

Als je weet hoe je vooruit moet rekenen, kun je ook achteruitrekenen.

Dan doe je precies de tegenovergestelde bewerking. Deed je bij vooruitrekenen $+4$ dan doe je bij achteruitrekenen -4 . Deed je bij vooruitrekenen $:3$ dan doe je bij achteruitrekenen $\times 3$, enzovoort.

Nu kun je de vorige drie termen van elke rij bepalen:

- ..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19,...
- ..., 98, 91, 84, 77, 70, 63, 56, 49,...
- ..., 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,...
- ..., 39366, 13122, 4374, 1458, 486, 162, 54, 18,...

Opgave 1

- Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 27, 31, 35, 39,...
- Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 64, 128, 256, 512,...
- Bepaal de vorige drie termen van de rij: ..., 3, 7, 11, 15,...
- De regelmaat van een bepaalde rij is -8 .
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?
- De regelmaat van een bepaalde rij is $\times \frac{1}{4}$.
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?

Opgave 2

In Nederland staan langs alle provinciale en rijkswegen hectometerpaaltjes. Na iedere hectometer (100 meter) staat er zo'n paaltje. Deze worden gebruikt om bijvoorbeeld de locatie van een ongeval precies door te kunnen geven. En op de radio hoor je vaak bij welke hectometerpaal er geflitst wordt. De palen geven de afstand aan vanaf het begin van de weg in kilometer. Achter de komma staan de hectometers aangegeven.

Bekijk de afbeelding van een hectometerpaaltje met daarop 81,0 kilometer. Gebruik in deze opgave dit paaltje steeds als uitgangspunt.



Figuur 2

- Ga in gedachten tien hectometerpaaltjes terug, welk getal staat erop?
- Ga in gedachten honderd hectometerpaaltjes vooruit, welk getal staat erop?
- Beschrijf de regelmaat bij vooruit- en achteruitrekenen.
- Is hier sprake van een rij met een lineair verband of een rij met een exponentieel verband?
- Welk getal moet erbij opgeteld worden om vijftig paaltjes verder te gaan?
- Hoeveel paaltjes verder staat er 105,5 kilometer?

Uitleg 2

Door rijen op een bepaalde manier te nummeren, kun je ermee doorrekenen.

Neem de rij: 3, 8, 13, 18, 23,...

Bij deze rij is de regelmaat $+5$.

Je kunt deze rij getallen ook in een tabel zetten waarbij je de termen in de rij een nummer geeft. Dat kan op twee manieren. Je kunt de eerste term het nummer 0 of 1 geven.

De tabel komt er in beide gevallen zo uit te zien:

- Nummering begint bij 0:

nummer	0	1	2	3	4
term	3	8	13	18	23

Tabel 1

Bij nummer 4 hoort de term 23.

- Nummering begint bij 1:

nummer	1	2	3	4	5
term	3	8	13	18	23

Tabel 2

Bij nummer 4 hoort de term 18.

De rijen zijn hetzelfde, alleen de nummering is anders. De vijfde term is in beide gevallen 23. Ongeacht of de nummering bij 0 of bij 1 begint, de vijfde term is nog steeds het vijfde getal in de rij.

De term met nummer 0 is: u_0 of $u(0)$.

Op dezelfde manier geef je de term met nummer 3 aan met u_3 of $u(3)$.

Bekijk de eerste tabel waarbij de nummering bij 0 begint. Daar geldt: $u_2 = 13$ en $u(3) = 18$.

Bekijk de tweede tabel waarbij de nummering bij 1 begint. Daar geldt: $u_2 = 8$ en $u(3) = 13$.

De algemene notatie voor term nummer n is u_n of $u(n)$.

Opgave 3

Bekijk de rij uit [Uitleg 2](#), met nummering vanaf 0.

- Wat is de derde term in de rij?
- Bepaal u_4 .
- Bepaal u_5 .

Opgave 4

Gegeven is de rij: 33,40,47,54,61,...

- Maak een tabel bij de rij. Nummer de termen en begin de nummering bij 0.
- Bepaal $u(3)$.
- Bepaal $u(6)$.
- Bepaal $u(15)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **rij** getallen met een bepaalde regelmaat, heten de getallen **termen**.

De nummering van deze termen kun je bij 0 of bij 1 laten beginnen.

Noteer de eerste term als u_0 of $u(0)$ wanneer de nummering bij 0 begint.

Noteer de eerste term als u_1 of $u(1)$ wanneer de nummering bij 1 begint.

Omschrijf de rij zelf als: u_n of $u(n)$, waarin n het nummer aangeeft. Geef daarbij aan of n bij 0 of bij 1 begint.

Je kunt twee soorten rijen onderscheiden:

Een **rij met een lineair verband** is een rij waarbij de regelmaat 'plus' of 'min' een vast getal is.

Een **rij met een exponentieel verband** is een rij waarbij de regelmaat 'keer' of 'gedeeld door' een vast getal is.

Voorbeeld 1

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarbij de regelmaat -6 is.
De vierde term in de rij is 182.
Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{40} .

Antwoord

Maak een tabel met n van 0 tot en met 8.
De vierde term is 182, dus $u_3 = 182$.
Bereken de rest van de tabel door gebruik te maken van de regelmaat -6 .
Doe bij vooruitrekenen -6 en bij achteruitrekenen $+6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	200	194	188	182	176	170	164	158	152

Tabel 3

Hieruit blijkt dat $u_0 = 200$ en $u_8 = 152$.
Bereken nu u_{40} . De tabel uitbreiden is veel werk. Een andere manier om dit te berekenen is als volgt:

$$\begin{aligned} u_0 &= 200 = 200 - 0 \cdot 6 \\ u_1 &= 194 = 200 - 1 \cdot 6 \\ u_2 &= 188 = 200 - 2 \cdot 6 \\ &\dots \\ u_{40} &= 200 - 40 \cdot 6 = -40 \end{aligned}$$

Opgave 5

Bekijk de rij in [Voorbeeld 1](#).
Bepaal de eerste term, de vierde term, u_9 , u_{10} en u_{100} .

Opgave 6

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarbij de regelmaat -3 is.
De vierde term in de rij is 166.
Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{50} .

Voorbeeld 2

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarbij de regelmaat $\times -2$ is.
De vierde term in de rij is -32 .
Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{15} .

Antwoord

Maak een tabel met n van 0 tot en met 8.
De vierde term is -32 , dus $u_3 = -32$.
Bereken de rest van de tabel door gebruik te maken van de regelmaat $\times -2$.
Doe bij vooruitrekenen $\times -2$ en bij achteruitrekenen $: -2$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024

Tabel 4

Hieruit blijkt dat $u_0 = 4$ en $u_8 = 1024$.

Bereken nu u_{15} . De tabel uitbreiden is veel werk. Een andere manier om dit te berekenen is als volgt:

$$u_0 = 4 = 4 \cdot (-2)^0$$

$$u_1 = -8 = 4 \cdot (-2)^1$$

$$u_2 = 16 = -8 \cdot -2 = 4 \cdot -2 \cdot -2 = 4 \cdot (-2)^2$$

...

$$u_{15} = 4 \cdot (-2)^{15} = -131072$$

Opgave 7

Bekijk de rij in [Voorbeeld 2](#).

Bepaal de eerste term, de vierde term, u_9 , u_{10} en u_{20} .

Opgave 8

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarbij de regelmaat $\times -3$ is.

De vierde term in de rij is -27 .

Maak een tabel bij de rij met n van 0 tot en met 8 en bepaal u_0 , u_8 en u_{16} .

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is een rij met een lineair verband u_n waarvan de regelmaat $+3$ is.

De vierde term in de rij is 42.

Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0 en bepaal u_0 , u_6 en u_{50} .

Opgave 10

Gegeven is een rij met een exponentieel verband u_n waarvan de regelmaat $\times \frac{1}{2}$ is.

De vierde term in de rij is 20000.

Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0 en bepaal u_0 , u_6 , en u_{14} .

Opgave 11

In een laboratorium wordt een bacteriecultuur gekweekt. In het begin bevat een petrischaaltje 2000 bacteriën. Ieder kwartaal verdubbelt dit aantal. Hoeveel bacteriën zijn er na twee jaar?

Opgave 12

Gegeven zijn de eerste twee termen van een rij. Bereken de gevraagde term.

- a Rij u heeft een lineair verband met de eerste twee termen $u_1 = 6$ en $u_2 = 14$. Bereken u_{25} .
- b Rij v heeft een exponentieel verband met de eerste twee termen $v_0 = 6000000$ en $v_1 = 3000000$. Geef v_{10} .

Opgave 13

Een wolkenkrabber in New York heeft vier liften. Ze stoppen niet alle vier op iedere verdieping. Alle liften stoppen op de begane grond.

De eerste lift stopt na de begane grond alleen op de vierde, de achtste en de twaalfde verdieping, enzovoort.

De tweede lift stopt na de begane grond alleen op de eerste, de vijfde en de negende verdieping, enzovoort.

- a Stel een tabel op van de eerste tien verdiepingen waar de tweede lift stopt. De nummering begint bij 0 voor de begane grond, en dat is de nulde verdieping.

- b De derde lift stopt na de begane grond op de tweede verdieping. Waar zal deze lift daarna stoppen? Gebruik dezelfde logica als bij de eerste en de tweede lift.
- c De derde lift stopt op de 54^e verdieping. Hij is onderweg naar boven waar tien stops verder iemand op het knopje gedrukt heeft. Op welke verdieping staat deze persoon?
- d De derde lift stopt op de 78^e verdieping. Hij is onderweg naar beneden waar iemand op de tiende verdieping op het knopje gedrukt heeft. Langs hoeveel stops komt de derde lift terwijl hij onderweg is naar deze persoon?

Opgave 14

Rachid krijgt vanaf zijn vijfde verjaardag iedere week € 0,50 zakgeld van zijn ouders. Dit bedrag wordt bij elke verjaardag verhoogd met € 0,50. Als Rachid zes jaar is, krijgt hij dus iedere week € 1,00 zakgeld. Zijn ouders gaan hiermee door tot Rachid vijftien jaar oud is.

- a Hoeveel euro zakgeld krijgt Rachid in totaal in het jaar dat hij vijf is?
- b En als hij zes jaar oud is?
- c De jaarlijkse bedragen aan zakgeld vormen de rij u_n .
Maak bij deze rij een tabel waarbij $n = 1$ hoort bij het vijfde levensjaar van Rachid.
- d Rachid stopt al zijn zakgeld in een spaarpot en geeft nooit iets uit.
Hoeveel zakgeld heeft hij de dag voor zijn achtste verjaardag in totaal gespaard?

Toepassen

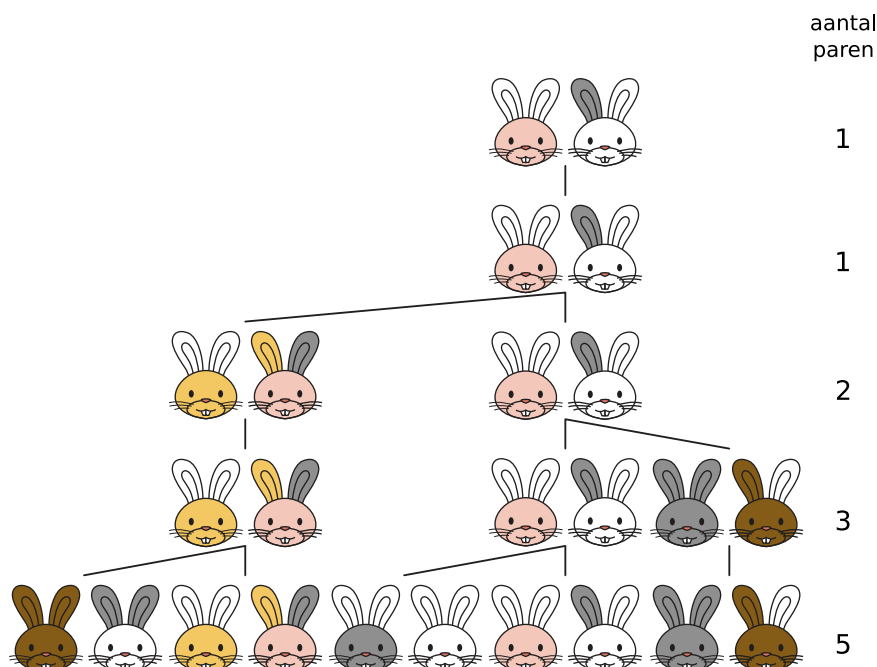
Opgave 15: De rij van Fibonacci

Fibonacci was een Italiaanse wiskundige.

In zijn boek 'Liber Abaci' stelt Fibonacci een eenvoudige vraag:

"Als een konijnenpaar elke maand een jong konijnenpaar voortbrengt, dat na twee maanden zelf ook weer een nieuw konijnenpaar voortbrengt, hoeveel konijnenparen zijn er dan na verloop van tijd, verondersteld dat ze allen in leven blijven?"

Schematisch ziet dat er als volgt uit:



Figuur 3

- a Zet deze redenering voort.
Hoeveel konijnenparen zijn er dan vijf maanden na de start?
- b Het aantal konijnenparen per maand vormt de rij u_n .
Maak van deze rij een tabel met $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



- c Er zit een bepaalde regelmaat in deze rij, maar hij is niet eenvoudig te vinden. Zoek de regelmaat.
- d Bereken de achtste en de negende term.

Opgave 16: Graankorrels op het schaakbord

Volgens een oud verhaal vroeg de **uitvinder van het schaakbord** aan de koning van India de volgende beloning voor zijn uitvinding. Hij vroeg 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, en zo het dubbele voor elk volgende veld tot en met het 64ste veld. De koning stemde hiermee in en liet zijn schatmeester uitrekenen hoeveel graankorrels de uitvinder zou krijgen. Dit bleken zoveel graankorrels te zijn dat heel India ermee bedekt kon worden met een laag van 30 cm.

- a Maak een tabel waarin je de velden nummert en het aantal graankorrels noteert. Laat de nummering lopen van 1 t/m 10.
- b Het aantal graankorrels a_n per veld vormen een rij.
Hoe groot is de twintigste term is deze rij?
- c Bepaal a_{64} .

Testen

Opgave 17

- a Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ...
- b Bepaal de volgende drie termen van de rij: ..., 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...
- c Bepaal de vorige drie termen van de rij: ..., 3, 7, 11, 15, 19, ...
- d De regelmaat van een bepaalde rij is -8 .
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?
- e De regelmaat van een bepaalde rij is $\times \frac{1}{4}$.
Hoe reken je bij deze rij vooruit en achteruit?

Opgave 18

Van een rij is bekend dat $u_0 = 55$ en dat de regelmaat $+3$ is.

- a Bereken u_4 en u_{100} .
Van een andere rij is bekend dat $u_0 = 55$ en dat de regelmaat $\times 1,5$ is.
- b Bereken u_4 en u_{100} .



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
