4.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Parameterkrommen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- parametervoorstelling van een kromme — periodieke beweging — eenparige cirkelbeweging, voerstraal, hoeksnelheid
- Lissajousfiguur — uiterste punten — snijpunten met de assen
- keerpunten — snelheidsvector, snelheid in een punt — versnellingsvector, versnelling in een punt — r.c. raaklijn
- zwaartelijnen en zwaartepunten

Activiteitenlijst

- werken met de parametervoorstelling van een kromme
- snijpunten met de assen berekenen — uitersten berekenen — parameter elimineren
- snelheidsvector en snelheid in een punt berekenen — versnellingsvector en versnelling in een punt berekenen — vergelijking raaklijn aan een kromme opstellen
- zwaartepunten van vlakke figuren berekenen — parametervoorstellingen opstellen — afstand punt tot kromme berekenen

Achtergronden

Het bestuderen van krommen gaat al terug tot de Oudheid.
Apollonius van Perga (262—190 v.Chr.) was één der eersten die een systematische studie van krommen maakte. Vooral zijn boek 'Kegelsneden' waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen.
Johannes Kepler (1571—1630) liet zien dat planetenbanen ellipsen zijn met de zon in één van de brandpunten.

Lissajousfiguren zijn genoemd naar **Jules Antoine Lissajous** (1822—1880). Lissajous was een Frans wis- en natuurkundige die zich vooral bezighield met akoestiek en optica. Hij verkreeg de figuren door licht achtereenvolgens te laten reflecteren door twee spiegels die bevestigd waren aan twee stemvorken die haaks op elkaar stonden.

Figuur 1 Jules Antoine Lissajous

Testen

Opgave 1

Gegeven is de baan met parametervoorstelling $(x(t), y(t)) = \left(2^{\frac{1}{t}}, t^2 - 4t\right)$ met $t > 0$.

a Bereken de tijdstippen waarop $x(t) = 16$ en geef de bijbehorende coördinaten.

b Bereken de tijdstippen waarop $y(t) = 0$ en geef de bijbehorende coördinaten.

Opgave 2

Een punt P beweegt met een cirkelvormige baan met straal 2 rondom middelpunt (-4,5). De baan wordt met constante snelheid met de klok mee afgelopen en heeft periode 2. Op $t = 0$ is $P(-4,7)$.

Geef een parametervoorstelling van de baan van P.

Opgave 3

Gegeven is de kromme k door $(x(t), y(t)) = (1 + 5\cos(\pi t), 3\sin(2\pi t))$.

a Is k een lissajousfiguur? Zo ja, wat is de periode?

b Plot de kromme.

c Bereken algebraïsch de uiterste punten van k.

d Bereken exact de baansnelheid op $t = \frac{1}{4}$.

e Bereken de baanversnelling op $t = \frac{1}{4}$. Rond af op één decimaal.

f Bereken de maximale baansnelheid. Rond af op één decimaal.

Opgave 4

De plaats van een bewegend punt $P(x(t), y(t))$ in een assenstelsel wordt gegeven door $x(t) = \cos(2t)$ en $y(t) = \cos(3t)$, waarbij t de tijd voorstelt. De beweging begint op $t = 0$.

a Toon aan dat P zich even lang links als rechts van de y-as bevindt.

De baan van punt P heeft twee keerpunten.

b Bereken deze keerpunten algebraïsch.

Tijdens de beweging verandert de afstand van het punt P op de baan tot het punt $O(0,0)$.

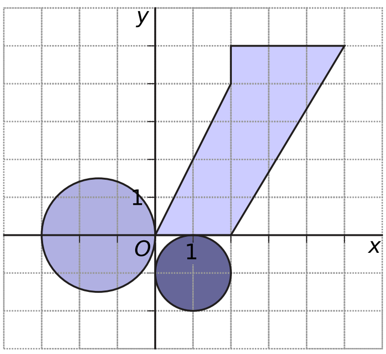
c Bereken de minimale waarde van de afstand OP in twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt P.

d In welke punten is die snelheid het grootst? Geef benaderingen in één decimaal.

Opgave 5

Bepaal het zwaartepunt in de figuur. Rond af op drie decimalen.



Figuur 2

Opgave 6

Gegeven is lijn $l : 4x - 2y = 3$ en punt $A(-1,5)$.

a Bereken $d(A, l)$. Rond af op twee decimalen.

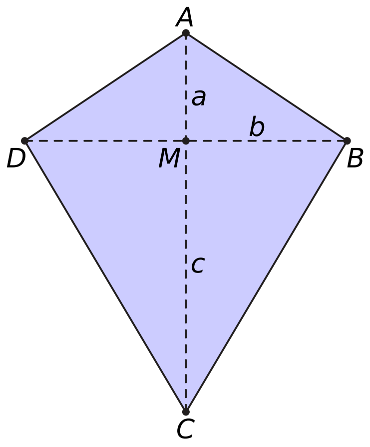
b Lijn m is evenwijdig met lijn l en de afstand tussen deze twee lijnen is 4.

Verder is gegeven dat m boven l ligt.

Stel een vergelijking op van lijn m.

Opgave 7

Bekijk de figuur. Gegeven is de vlieger $ABCD$. De diagonalen snijden elkaar in het punt M. Er geldt $|AM| = a$, $|BM| = b$ en $|CM| = c$.



Figuur 3

a Toon aan dat de afstand tussen het zwaartepunt van de vlieger en het punt M gelijk is aan: $|MZ| = \left|\frac{a^2b-bc^2}{3ab+3bc}\right|$.

b Van een vlieger $ABCD$ zijn de punten $A(3,5)$ en $B(6,3)$ gegeven. Bovendien is gegeven dat het zwaartepunt van deze vlieger ligt bij $Z(3,2)$ en dat punten B, D en het zwaartepunt op dezelfde lijn liggen. Bereken de coördinaten van de punten C en D.

Opgave 8

Gegeven is de kromme k door $(x(t), y(t)) = (2\sin(t) + 2\cos(2t), 2\sin(2t))$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Bereken algebraïsch de punten van deze kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met één van de assen. Geef de coördinaten van die punten waar het kan exact, of anders in één decimaal.

b Plot de kromme.

c De x-as wordt in drie punten gesneden door de kromme. Stel in die punten alle raaklijnen aan k op. Rond af op één decimaal.

d De lijn $l : y = \frac{1}{2}x + 2$ snijdt de kromme in twee punten. Bereken in twee decimalen voor welke waarden van t dit gebeurt.

e Bereken in één decimaal de hoeken die k en l in de snijpunten maken.

Toepassen

Opgave 9: Cycloïde

De **cycloïde** is de kromme die het ventiel van je fietsband doorloopt als je met een constante snelheid fietst. Het is dus de beweging van een punt op een constant rollende cirkel...

Bekijk de applet: Cycloïde

Hier zie je een cycloïde ontstaan vanuit een punt dat op een draaiende cirkel met straal 1 ligt, waarvan de as beweegt langs de lijn $y = 1$.
De bijbehorende parametervoorstelling is: $x(t) = t - \sin(t)$ en $y(t) = 1 - \cos(t)$.

a Leid zelf deze parametervoorstelling af.

b Laat door een berekening zien dat de keerpunten van deze kromme $(k \cdot 2\pi, 0)$ zijn.

c Hoeveel procent van elke omwenteling van het wiel zit het ventiel hoger dan 1 m? Beredeneer dit, maar laat ook zien hoe het uit de bewegingsvergelijkingen volgt.

Opgave 10: De gravitatiewet van Newton

Een hele mooie toepassing van krommen zijn de banen van de planeten om de zon. Die worden bepaald door de drie wetten van Kepler waaruit de gravitatiewet van Newton is af te leiden.
Volgens Kepler beschrijven de planeten een ellipsvormige, bijna cirkelvormige, baan om de zon waarbij T^2/R^3 voor alle planeten gelijk is. T is de omlooptijd in jaren en R de (gemiddelde) afstand tot de zon in AE (1 AE = 1 astronomische eenheid = de straal van de Aardbaan).

Om een model voor de planetenbanen op te stellen neem je de Zon als oorsprong van een xy-assenstelsel waarin alle planeten bewegen (in werkelijkheid liggen niet alle banen precies in één vlak). Uitgaande van zuivere cirkelbanen, geldt dan voor de baan van elke planeet $(x(t), y(t)) = \left(R\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right), R\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)$.

a Door differentiëren bepaal je de snelheidsvector en de versnellingsvector. Leid uit de baanvergelijkingen af, dat voor de snelheid geldt $v = \frac{2\pi R}{T}$ en dat voor de versnelling geldt $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

b Laat zien dat $a = \frac{v^2}{R}$.

Volgens Newton geldt voor elke massa m dat er een kracht $F = m\cdot a$ nodig is om hem een versnelling van a te geven en volgens Kepler is $T^2 / R^3 = k$ een constante.

c Laat zien dat hieruit volgt $F = 4\pi^2 k\cdot\frac{m}{R^2}$.

Newton bedacht dat in een algemene gravitatiewet die de aantrekkingskracht van de planeten en de zon van ons planetenstelsel zou kunnen beschrijven in ieder geval ook de massa M van de Zon zou moeten bevatten.

d Leg uit waarom op grond van het voorgaande zo'n gravitatiewet de vorm $F = G\cdot\frac{M\cdot m}{R^2}$ heeft.

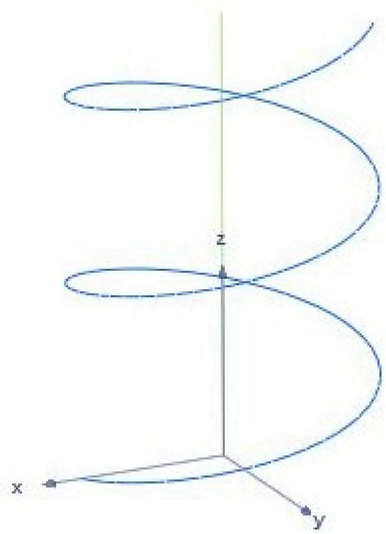
Opgave 11: Krommen in 3D

Met $P(x(t), y(t))$ beschrijf je hoe de coördinaten van een punt in een Oxy-vlak veranderen met de tijd t. Je krijgt dan een kromme in twee dimensies.

Door het Oxy-vlak als grondvlak op te vatten en tegelijkertijd het punt omhoog en/of omlaag bewegen, heb je behalve $x(t)$ en $y(t)$ ook een functie $z(t)$ nodig. Die laatste functie legt dan vast hoe hoog het punt boven het Oxy-vlak zit. Je krijgt nu een kromme in drie dimensies.

Hier zie je in een $Oxyz$-assenstelsel een voorbeeld van zo'n 3D-kromme: (een stukje van) een Archimedische schroeflijn. Er geldt: $(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), 0{,}2t)$ met t in seconden.

Wanneer je de 3D-kromme recht van boven (in de z-richting) bekijkt zie je de 2D-kromme $(x,y) = (\cos(t), \sin(t))$, een cirkel met straal 1. Dus elke 2π seconden vind er één omwenteling plaats.
Bekijk je de 3D-kromme precies vanuit de y-richting, zie je $(x,z) = (\cos(t); 0{,}2t)$, een sinusoïde om de z-as.



Figuur 4

a Teken met je grafische rekenmachine bovenaanzicht, zijaanzicht (in de y-richting) en vooraanzicht (in de x-richting) van deze kromme. Neem $0 \leq t \leq 4\pi$.

b Hoe lang is elke omwenteling van deze schroeflijn? En hoe groot is de afstand tussen twee punten die recht boven elkaar liggen op twee opeenvolgende omwentelingen (dit noem je de ‘spoed’ van de schroeflijn)?

De snelheidsvector wordt in 3D gegeven door $\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$. De snelheid in een punt is de lengte van die snelheidsvector.

c Hoe groot is de snelheid waarmee een punt deze schroeflijn doorloopt op $t = 0$? En op andere tijdstippen?

d Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn die op $t = 0$ begint in het punt (0,4,0), ligt op een cilinder met straal 4 met als as de z-as en op $t = 2\pi$ het punt (0,-4,2) passeert?

Een geheel ander soort ruimtekromme wordt beschreven door $x(t) = 8\sin(t)$, $y(t) = 8\sin(2t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak.

e Leg uit waarom deze kromme een soort van achtbaan voorstelt.

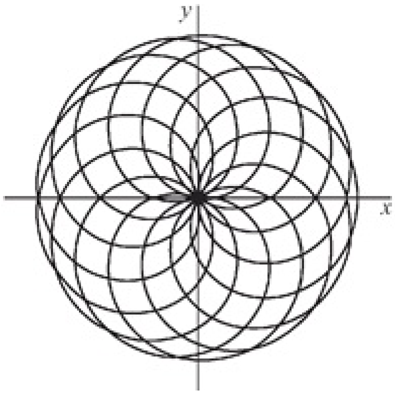
Examen

Opgave 12: Een beweging door (0,0)

De beweging van een punt in het Oxy-vlak wordt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van het punt getekend.



Figuur 5

a Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip $t = 0$.

De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos\left(8\frac{1}{2}t\right) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin\left(8\frac{1}{2}t\right) \end{cases}$$

met $r(t) = 2\cos\left(6\frac{1}{2}t\right)$.

b Toon dit aan.

Bij het doorlopen van zijn baan passeert het punt een aantal keren (0,0).

c Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.

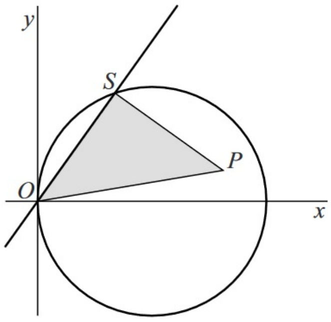
(bron: examen wiskunde B vwo 2002, eerste tijdvak)

Opgave 13: Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y = ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.

De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om S over 90°. Zie de figuur hiernaast, waarin ook driehoek OPS is weergegeven.
Voor de coördinaten van P geldt:

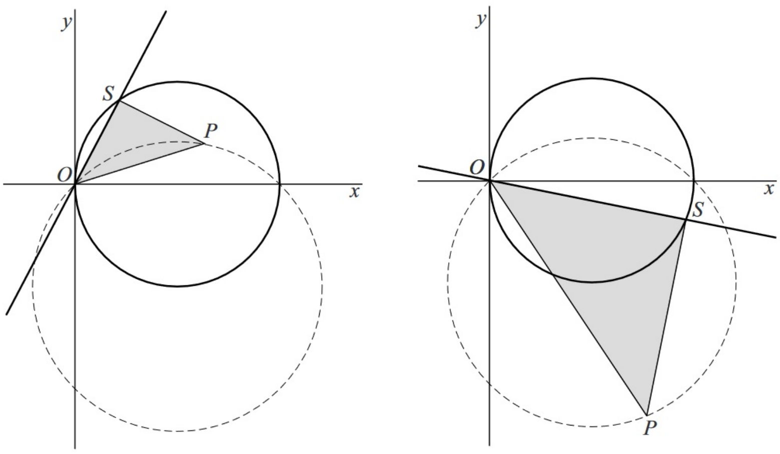
$x_P = \frac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_P = \frac{2a-2}{a^2+1}$



Figuur 6

a Bewijs dat de formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P. In de twee figuren hieronder is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O. Deze cirkel is gestippeld getekend.



Figuur 7

b Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

c Er is een waarde van a waarvoor x_P maximaal is.

Bereken exact deze waarde van a.

(bron: pilotexamen vwo B in 2016, eerste tijdvak)

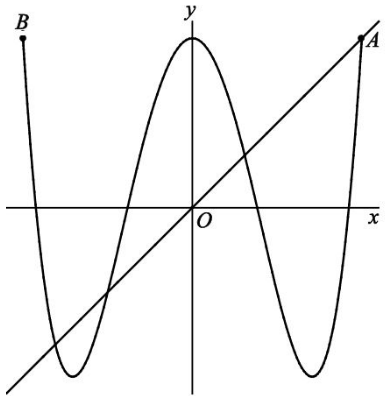
Opgave 14: Een W

Een punt P beweegt in het Oxy-vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) \\ y(t) = \cos\left(\frac{4\pi}{15}t\right) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
De baan die P doorloopt heeft de vorm van een W. Op tijdstip $t = 0$ start P in punt $A(1,1)$ en op tijdstip $t = 15$ bevindt P zich voor het eerst in punt $B(-1,1)$.

In de figuur zijn de baan die P doorloopt, de punten A en B en de lijn met vergelijking $y = x$ getekend. Gedurende het tijdsinterval [0,15] bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn met vergelijking $y = x$.



Figuur 8

a Bereken dit aantal seconden.

Op zeker moment tijdens de beweging van A naar B passeert P de y-as. Daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

b Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat van P op dat moment.

(bron: examen wiskunde B vwo 2012, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.