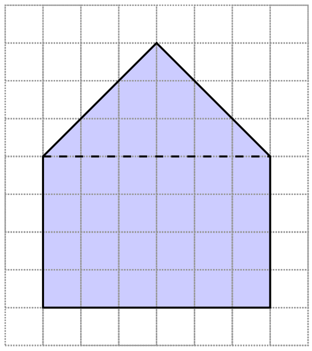
4.4 Toepassingen

Inleiding

Je hebt in de analytische meetkunde en de vlakke krommen al met allerlei technieken kennis gemaakt. Maar er is nog veel meer. Je zult nu bijvoorbeeld het zwaartepunt berekenen van een vlakke figuur zoals die hiernaast. Ook zul je zien hoe een bepaald punt een rechte of een kromme doorloopt afhankelijk van een ander bewegend punt. En tenslotte bereken je de afstand van een punt tot een kromme.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het zwaartepunt van een roosterfiguur berekenen;
- de afstand van een punt tot een kromme berekenen.
- wat er gebeurt met een afhankelijk punt als een gegeven punt over een rechte lijn beweegt;

Voorkennis

- werken met vectoren in 2D;
- werken met parameterkrommen in 2D.

Verkennen

Opgave V1

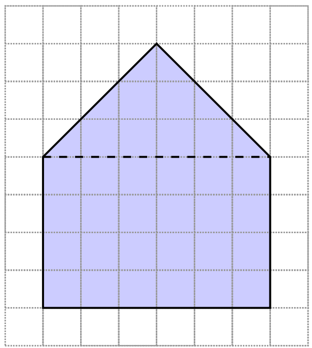
Je ziet hier een vlakke figuur die is samengesteld uit een rechthoek en een driehoek.

a Welk punt kun je als het zwaartepunt van de rechthoek opvatten?

Je kunt een assenstelsel maken waarvan de x-as langs de onderkant van de rechthoek en de y-as langs de linkerzijde van de rechthoek ligt. Een roostervierkantje is de eenheid.

b Welke coördinaten heeft dan het zwaartepunt van de driehoek?

c Welk punt is het zwaartepunt van de gehele figuur?



Figuur 2

Uitleg 1

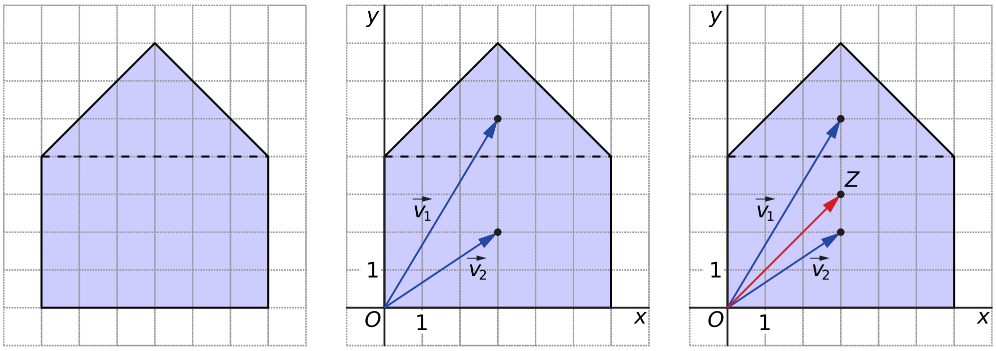
Een zwaartepunt is het ‘midden’ van de massa van een object. Als je het object alleen op deze plaats zou ondersteunen met een heel dun voorwerp blijft het in evenwicht. Bij meetkundige figuren in het platte vlak is er geen sprake van echte massa, maar die kun je voorstellen door de oppervlakte ervan.

Het zwaartepunt van eenvoudige meetkundige figuren kun je in veel gevallen met behulp van symmetrie bepalen:

- Het zwaartepunt van een cirkel is het middelpunt van de cirkel.
- Het zwaartepunt van een rechthoek is het snijpunt van de diagonalen.
- Het zwaartepunt van een driehoek is het snijpunt van de zwaartelijnen.

Het zwaartepunt van samengestelde vlakke figuren bereken je met behulp van vectoren.
Bekijk figuur a die uit een driehoek en een rechthoek bestaat.

Breng een assenstelsel aan. Je kunt elk willekeurig punt als oorsprong nemen. Teken de vectoren naar de afzonderlijke zwaartepunten (figuur b).



figuur a figuur b figuur c

Figuur 3

Voor de berekening van het zwaartepunt Z van deze samengestelde figuur heeft de vector naar het zwaartepunt van de driehoek een ander gewicht dan de vector naar het zwaartepunt van de rechthoek. De gewichten van deze vectoren verhouden zich tot de oppervlaktes van de geometrische figuren, dat wil zeggen als 9 : 24 (figuur c).

De vector naar het zwaartepunt van deze samengestelde geometrische figuur is daarom gelijk aan

$\overrightarrow{OZ} = \frac{9}{33}\vec{v}_1 + \frac{24}{33}\vec{v}_2 = \frac{9}{33}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \frac{24}{33}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\frac{9}{11}\end{pmatrix}$.

Opgave 1

Bij een driehoek ligt het zwaartepunt op het snijpunt van de zwaartelijnen.

a Wat is een zwaartelijn?

b Geef een vectorvoorstelling van de drie zwaartelijnen van de driehoek in **Uitleg 1** en bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen.

Het zwaartepunt van elke ΔABC met $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ is gelijk aan $Z = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

c Toon dit aan.

d Laat zien, hoe je hiermee het zwaartepunt van de driehoek in de uitleg berekent.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.
Voor het bepalen van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur kun je elk willekeurig punt als oorsprong nemen. De keuze voor de oorsprong heeft invloed op de hoeveelheid rekenwerk.

a Welke punten als oorsprong zou je minder rekenwerk geven?

b Bereken de coördinaten van het zwaartepunt door één van deze punten als oorsprong te nemen.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Gegeven is de rechte lijn $l: y = 2$. Op deze lijn ligt punt P.

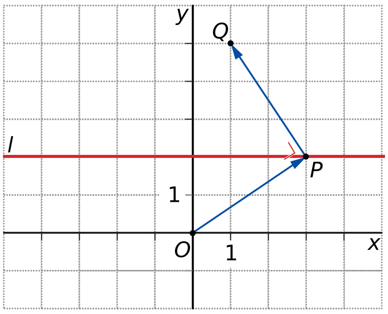
$\overrightarrow{PQ}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{OP}$ en heeft dezelfde lengte. Bekijk de figuur.

Als P over lijn l beweegt, zal Q ook over een rechte lijn bewegen.

Dat kun je als volgt algebraïsch laten zien.

Stel dat $P(t,2)$ dan is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Figuur 4

Dit betekent dat punt Q met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beweegt.

Dit is een rechte lijn met vergelijking $y = x + 4$.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Leg uit waarom $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$

b Toon aan dat $y = x + 4$ een vergelijking is van de lijn waar Q op ligt.

Opgave 4

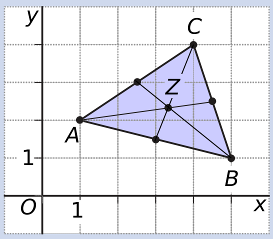
Bekijk **Uitleg 2**. Stel dat $l: y = 5$.
Over welke lijn beweegt Q dan, als P over l beweegt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is.

- Het zwaartepunt van een cirkel ligt in het middelpunt van de cirkel.
- Het zwaartepunt van een rechthoek ligt op het snijpunt van de diagonalen van de rechthoek.
- Het zwaartepunt van een driehoek ligt op het snijpunt van de zwaartelijnen van de driehoek.
  Als $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ de hoekpunten van de driehoek zijn, dan is het zwaartepunt
  $Z = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.



Figuur 5

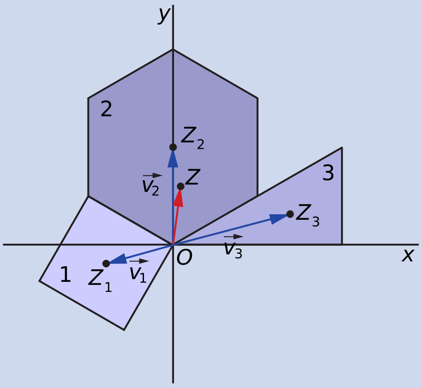
Bij het berekenen van het zwaartepunt van samengestelde vlakke figuren moet je rekening houden met hun oppervlaktes.

Bekijk de figuren 1, 2 en 3, hun afzonderlijke zwaartepunten Z_1, Z_2 en Z_3 en de vectoren vanuit een gezamenlijk punt O naar die zwaartepunten $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ en $\vec{v_3}$.

Bereken de oppervlakte A_1, A_2 en A_3 van de afzonderlijke figuren en de totale oppervlakte A_t van die figuren samen.
De vector naar het gezamenlijke zwaartepunt Z_p vind je met:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{A_1}{A_t} \cdot \vec{v_1} + \frac{A_2}{A_t} \cdot \vec{v_2} + \frac{A_3}{A_t} \cdot \vec{v_3}$$

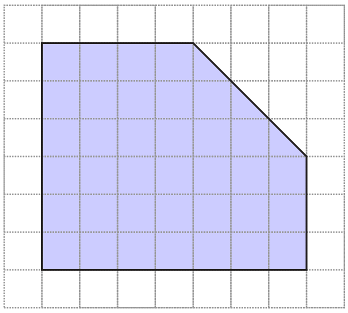
Behalve het berekenen van het zwaartepunt van een samengestelde vlakke figuur zijn er meer toepassingen van analytische meetkunde en parameterkrommen. Bekijk de voorbeelden.



Figuur 6

Voorbeeld 1

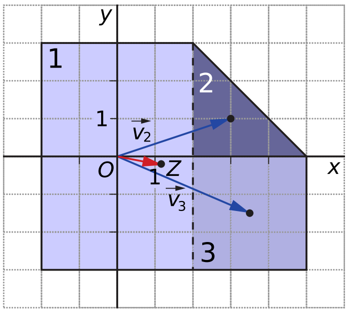
Bepaal de exacte plaats van het zwaartepunt van deze figuur.



Figuur 7

Antwoord

Verdeel de figuur in figuur 1, 2 en 3 en breng een assenstelsel aan.



Figuur 8

En:

- De coördinaten van de zwaartepunten zijn: $Z_1 = (0{,}0)$, $Z_2 = (3{,}1)$ en $Z_3 = \left(3\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$.
- De oppervlaktes zijn: $A_1 = 24$, $A_2 = 4\frac{1}{2}$ en $A_3 = 9$.

De oppervlakte van de hele figuur is: $A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 24 + 4\frac{1}{2} + 9 = 37\frac{1}{2}$.

$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ en $\vec{v_3}$ zijn de vectoren naar de afzonderlijke zwaartepunten.
De vector naar het zwaartepunt Z van de hele figuur vind je met:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{24}{37\frac{1}{2}} \vec{v_1} + \frac{4\frac{1}{2}}{37\frac{1}{2}} \vec{v_2} + \frac{9}{37\frac{1}{2}} \vec{v_3} = \frac{16}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{25}\begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{25} \end{pmatrix}.$$

De coördinaten van het zwaartepunt van deze figuur zijn: $\left(1\frac{1}{5}, -\frac{6}{25}\right)$.

Opgave 5

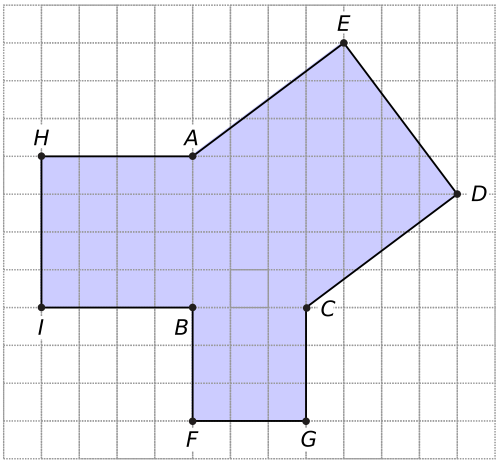
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom is de keuze voor de oorsprong van het assenstelsel handig?

b Voer zelf de berekening van het zwaartepunt uit.

Opgave 6

Bepaal de plaats van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur.



Figuur 9

Voorbeeld 2

Punt P ligt op de lijn $l : y = 3$.

Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP}$ en staat loodrecht op lijn l.
Als P over lijn l beweegt, zal Q over een kromme bewegen.

Stel een parametervoorstelling van deze kromme op.

Antwoord

Stel dat $P(t,3)$, dan is $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{t^2+9}$.

Dit betekent dat $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t^2+9} \end{pmatrix}$.

En $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} t \\ 3+\sqrt{t^2+9} \end{pmatrix}$.

Een parametervoorstelling van de kromme is $(x(t),y(t)) = \left(t,3+\sqrt{t^2+9}\right)$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Geef een vergelijking van de kromme waarin je y uitdrukt in x.

b Stel dat $l : y = -1$. Geef een vergelijking van de kromme die je nu krijgt.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Stel dat lijn l de vergelijking $y = x$ heeft.

a Bepaal de coördinaten van Q als $P(3,3)$.

b Welke coördinaten heeft Q als $P(-3,-3)$?

c Welke figuur doorloopt Q nu als P over lijn l beweegt?

Voorbeeld 3

Gegeven is de parabool $p:(x(t),y(t))=\left(2t,4-t^2\right)$ en het punt $A(1,2)$.
Bereken $\text{d}(A,p)$ in twee decimalen.

Antwoord

Neem aan dat punt P de parabool p doorloopt, dan is $P\left(2t,4-t^2\right)$.

En $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(2t-1)^2+\left(2-t^2\right)^2}$.

De gevraagde afstand is de kleinste waarde van deze uitdrukking en dus het minimum van $f(t)=(2t-1)^2+\left(2-t^2\right)^2$.

Ga zelf na dat het minimum optreedt bij $t=1$. De waarde ervan is $\text{d}(A,p)=\sqrt{2}$.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3**. Laat met behulp van differentiëren zien hoe je de gevraagde afstand berekent.

Opgave 10

Bereken de afstand van $A(1,1)$ tot de ellips $e:x^2+4y^2=16$ in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 11

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van driehoek ABC met $A(-2,2)$, $B(2,-2)$ en $C(5,3)$.

Opgave 12

Bereken de afstand tussen de kromme $k:(x(t),y(t))=\left(t^2,4-t\right)$ en punt $A(0,6)$.

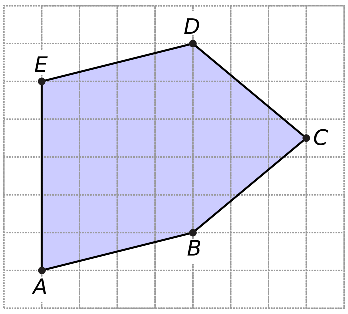
Opgave 13

a Druk de coördinaten van het zwaartepunt van de driehoek met $A(0,a)$, $B(b,0)$ en $C(a,b)$ uit in a en b.

b Toon aan dat het zwaartepunt van de driehoek met $A(0,a)$, $B(b,0)$ en $C(-a,-b)$ op de lijn $y=-x$ ligt.

Opgave 14

Bepaal de plaats van het zwaartepunt van deze samengestelde figuur.



Figuur 10

Opgave 15

Gegeven zijn de lijnen $l:2x-8y=-1$ en $m:-x+4y=10$.

a Toon met behulp van normaalvectoren van l en m aan dat de lijnen evenwijdig zijn.

b Bereken de afstand tussen l en m. Rond af op één decimaal.

c Punt A heeft een x-coördinaat van 4 en $\text{d}(A,l)=5$.
Bereken exact de mogelijke y-coördinaten van A.

Opgave 16

Van ΔPQR is het zwaartepunt $Z(4,1)$ en punt $P(2,5)$ gegeven.
De oppervlakte van driehoek PQR is 15. Noem het punt links van punt P punt Q.
Geef de coördinaten van hoekpunt Q in de beschreven gevallen.
(Bedenk dat het zwaartepunt elke zwaartelijn verdeelt in twee delen die zich verhouden als 2 : 1. Dus als S het midden van QR is, dan is $|PZ| : |ZS| = 2 : 1$.)

a De punten Q en R liggen op één horizontale lijn.

b De lengte van zijde PQ is minimaal.

Toepassen

Opgave 17: Zwaartepunt in de astronomie

Het zwaartepunt is een begrip dat erg belangrijk is in de astronomie. Het zwaartepunt heeft invloed op de omloopbaan van hemellichamen. Bekijk de tabel met daarin de massa's van de verschillende planeten in ons zonnestelsel en de zon, relatief aan die van de aarde, en de gemiddelde afstand ten opzichte van de zon in AE (astronomische eenheid, de gemiddelde afstand van het middelpunt van de aarde tot het middelpunt van de zon).

object	Zon	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
massa (aardemassa)	333000	0,055	0,815	1	0,107	317,8	95,159	14,536	17,147
afstand (AE)	0	0,4	0,7	1	1,5	5,2	9,5	19,2	30,1

Tabel 1

Veronderstel dat de planeten op een bepaald moment op één lijn aan dezelfde kant van de zon staan. Bereken in dat geval hoe ver het zwaartepunt van het zonnestelsel is verwijderd van het massamiddelpunt van de zon.

Opgave 18: Bewegen over een lijn

Gegeven is de lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Op deze lijn ligt het punt P.

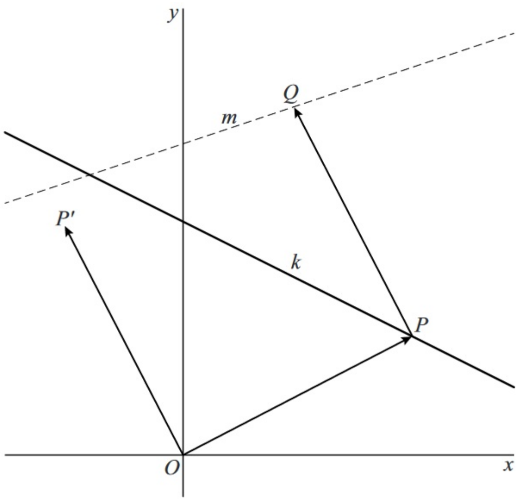
Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$.

Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$.
Zie de figuur.

Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.

Stel een vergelijking van m op.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2017, eerste tijdvak)



Figuur 11

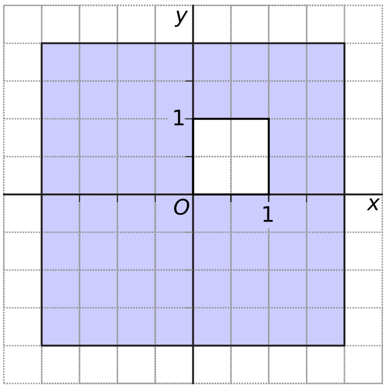
Testen

Opgave 19

Bekijk de figuur. Het is een vierkant met een vierkant eruit.

a Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van deze figuur.

b Je kunt het zwaartepunt sneller berekenen door twee vectoren met hun gewicht van elkaar af te trekken. Laat dit zien.



Figuur 12

Opgave 20

Het zwaartepunt van ΔABC is punt $Z(3,5)$.
De coördinaten van A en B zijn $A(-1,3)$ en $B(6,2)$.

a Geef de vectorvoorstelling van de zwaartelijn door hoekpunt C.

b Geef de coördinaten van hoekpunt C.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 21

Bereken de afstand van punt $A(0,4)$ tot de parabool $p : y = x^2$.