4.1 Periodieke beweging

Inleiding

De ‘Polyp’ is een echte kermisattractie.
Je zit dan in een bakje dat om een bepaald punt draait. Dat punt draait op zijn beurt ook weer om het centrum van de machine. De beweging die je dan maakt herhaalt zich steeds, maar is toch niet gewoon een saai rondje...
Je doorloopt een kromme waarbij je soms heel snel gaat en dan weer heel langzaam.
Dat veroorzaakt de sensatie en het gegil...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip periodieke beweging, met name de eenparige cirkelbeweging;
- periodieke bewegingen beschrijven met functies van de tijd t;
- werken met parameterkrommen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = a$ of $\cos(x) = a$ oplossen;
- differentiëren met alle basisregels van alle soorten functies en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

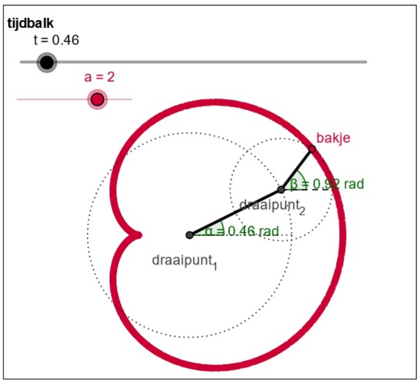
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De ‘Polyp’ is een echte kermisattractie.
Deze applet laat de beweging van het bakje zien. Beweeg de tijd door op de punt van de zwarte schuifbalk te klikken en dan de pijltjestoetsen te gebruiken. Je kunt ook de snelheid waarmee het bakje om het tweede draaipunt draait veranderen.

Kun je de kromme die je doorloopt met een formule beschrijven?

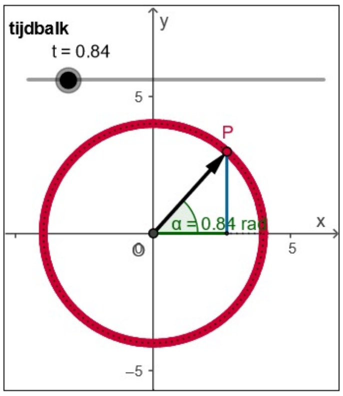


Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet

De beweging van een punt P met de tijd t kun je beschrijven door elk van de coördinaten een functie van t te maken: $P(x,y) = (x(t), y(t))$. Een goed voorbeeld is de beweging van P met een constante snelheid over een cirkel, de eenparige cirkelbeweging. Heeft de cirkel een straal van 4 cm en wordt in 2π seconden de cirkel één keer compleet doorlopen, dan geldt: $P(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.



Figuur 3

Deze eenparige cirkelbeweging herhaalt zich eindeloos als je de tijd laat doorlopen. Dit is het prototype van een periodieke beweging. De pijl die wijst vanuit de oorsprong O van het assenstelsel naar punt P is plaatsvector $\overrightarrow{OP}$. Het aantal radialen per seconde dat plaatsvector $\overrightarrow{OP}$ aflegt heet de hoeksnelheid van eenparige cirkelbeweging. Hier is de hoeksnelheid 1 rad/s, want in 2π seconden wordt 2π radialen afgelegd. De snelheid waarmee punt P beweegt is echter vier keer zo groot want in 2π seconden wordt een afstand van $2\pi \cdot 4$ cm afgelegd.

Punt P kan de cirkel ook in bijvoorbeeld 10 seconden doorlopen.
In dat geval moet de periode van de twee sinusoïden die de baan beschrijven worden aangepast. De plaatsvector wordt $(x,y) = \left(4\cos\left(\frac{2\pi}{10}\cdot t\right), 4\sin\left(\frac{2\pi}{10}\cdot t\right)\right)$.
Ook kunnen de straal van de cirkel en het middelpunt anders zijn.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg uit waarom $P(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.

b Waar zit P als $t = \pi$?

c Leg uit wat het verschil is tussen de hoeksnelheid van punt P en de baansnelheid van ditzelfde punt.

d Hoe groot zijn de hoeksnelheid en de baansnelheid van P als dit punt de cirkel in 10 s doorloopt?

Opgave 2

P doorloopt met een vaste snelheid elke 15 seconden een cirkel met straal 6 cm en middelpunt $M(0,0)$.

a Beschrijf de beweging van punt P op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Hoeveel bedragen nu de hoeksnelheid en de baansnelheid van punt P

Opgave 3

P doorloopt met een vaste snelheid elke 15 seconden een cirkel met straal 6 cm en middelpunt $M(1,2)$.

a Beschrijf de beweging van punt P op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

De hoeksnelheid is de snelheid in radialen per seconden waarmee een vector zijn vaste beginpunt draait.

b Waarom is de hoeksnelheid van $\overrightarrow{OP}$ nu niet een constante?

c Is de baansnelheid wel een constante?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

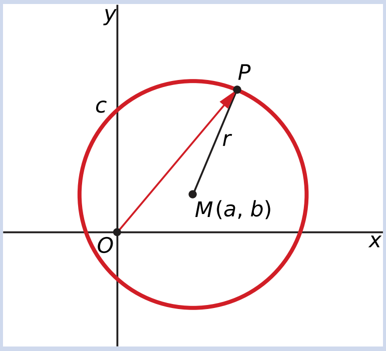
Bekijk de applet

In het algemeen kan de **eenparige cirkelbeweging** van een punt P worden beschreven door:

$P(x,y) = \left(a + r\cos\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right), b + r\sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)\right)$

Hierin stelt de **parameter** t de tijd in seconden voor en zijn x en y de coördinaten van punt P. Het middelpunt van de cirkel die P doorloopt is $M(a,b)$. De **plaatsvector** $\overrightarrow{OP}$ begint altijd in de oorsprong van het assenstelsel.

Deze beschrijving van een bewegend punt noem je een **parametervoorstelling** van de **kromme** die het punt doorloopt. In dit geval is sprake van een kromme die herhaaldelijk wordt doorlopen, dus van een **periodieke beweging**.



Figuur 4

Bij de eenparige cirkelbeweging is de **hoeksnelheid** het aantal radialen dat de **voerstraal** $\overrightarrow{MP}$ per seconde doorloopt. Hier dus $\frac{2\pi}{p}$ rad/s.
De snelheid waarmee het punt P zelf beweegt is r keer zo groot.

De eenparige cirkelbeweging is een voorbeeld van een **parameterkromme**, een kromme die je kunt opvatten als de baan die een bewegend punt P doorloopt en die wordt beschreven door $P(x,y) = (x(t), y(t))$. Dergelijke krommen kun je ook op de GR tekenen.

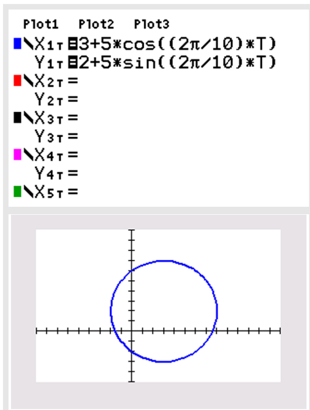
Voorbeeld 1

Een parameterkromme is gegeven door $(x,y) = \left(3 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right), 2 + 5\sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)\right)$.
Breng deze kromme in beeld op de grafische rekenmachine.
Leg uit waarom dit een eenparige cirkelbeweging betreft en bereken de snelheid waarmee een punt P van deze kromme beweegt.

Antwoord

In het **Practicum** zie je hoe je met de grafische rekenmachine parameterkrommen in beeld kunt brengen. Hiernaast zie je de kromme.
Omdat $x(t)$ een sinusoïde is met evenwichtsstand $x = 3$ en amplitude 5 geldt: $-2 \leq x \leq 8$.
Omdat $y(t)$ een sinusoïde is met evenwichtsstand $y = 2$ en amplitude 5 geldt: $-3 \leq y \leq 7$.
Dit bepaalt je vensterinstellingen. Je lijkt een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ en straal 5 te krijgen.

De periode van beide functies is 10, dus de cirkel wordt in 10 seconden doorlopen.



Figuur 5

De hoeksnelheid van $\overrightarrow{MP}$ is $\frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi$ rad/s.
De snelheid waarmee P beweegt is 5 keer zo groot, dus π eenheden/s.

De kromme is inderdaad een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ en straal 5 als de afstand van elk punt P op de cirkel tot M gelijk is aan 5. Met de stelling van Pythagoras toon je aan dat dit voor elke $P(x,y)$ klopt.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is nu een parameterkromme door

$P(x(t), y(t)) = \left(1 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{15} \cdot t\right), 2 + 6\sin\left(\frac{2\pi}{15} \cdot t\right)\right)$.

a Breng deze parameterkromme op je grafische rekenmachine volledig in beeld. Welk interval moet je dan voor de parameter t kiezen?

b Waarom krijg je dezelfde kromme als je voor t waarden kiest vanaf -15 tot 40?

c Wat krijg je voor figuur als je voor t waarden kiest vanaf 0 tot 8?

d Je kunt ook de stapgrootte van t instellen. Wat gebeurt er als je die op 1 instelt, te beginnen bij $t = 0$?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er wordt beweerd dat P over een cirkel met middelpunt $M(3,2)$ loopt.

a Bewijs dit met behulp van de stelling van Pythagoras. Aan welke vergelijking in x en y voldoet elk punt van deze kromme?

b Maak op je rekenmachine de parameterkromme waarvoor geldt

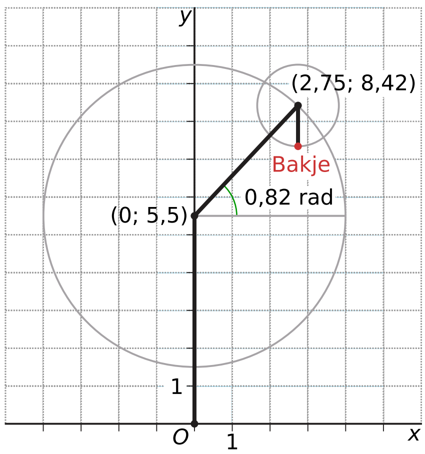
$(x, y) = \left(3 + 5\sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right), 2 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right)\right)$.

Krijg je dezelfde kromme als in het voorbeeld of zijn er verschillen? En zo ja, wat zijn die verschillen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Hier zie je een reuzenrad op de kermis. Het bakje doorloopt een eenparige cirkelbeweging en draait in 30 seconden helemaal rond. Stel er een mogelijke parametervoorstelling voor op. Ga daarbij uit van het gegeven assenstelsel, alle afmetingen zijn in meter.



Figuur 6

Antwoord

Het bakje doorloopt in 30 seconden een cirkel met straal 4 m en middelpunt $M(0; 5{,}5)$. Zowel $x(t)$ als $y(t)$ zijn daarom sinusoïden met een amplitude van 4 en een periode van 30 seconden. Voor $x(t)$ is de evenwichtsstand $x = 0$, voor $y(t)$ is de evenwichtsstand $y = 5{,}5$.

Een mogelijke parametervoorstelling is daarom:

$(x, y) = \left(4\cos\left(\frac{2\pi}{30} \cdot t\right); 5{,}5 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{30} \cdot t\right)\right)$

In dat geval zit het bakje op $t = 0$ in het punt $(4; 5{,}5)$ en dat klopt ook met de figuur.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** moet je een parametervoorstelling opstellen voor een bakje van een reuzenrad.

a Probeer eerst zelf deze parametervoorstelling op te stellen. Loop pas daarna het voorbeeld door.

b Teken de kromme met je grafische rekenmachine.

c Op welke tijdstippen is het bakje 7,5 m boven de grond? Bepaal je antwoord zowel met je GR als algebraïsch.

d Met hoeveel km/h beweegt het bakje?

e Laat zien, dat de gegeven parametervoorstelling inderdaad punten P oplevert die op een vaste afstand van het middelpunt M liggen.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. De parametervoorstelling is zo gekozen dat op $t = 0$ het bakje in $P(4; 5{,}5)$ zit.

a Laat zien, dat de parametervoorstelling $(x, y) = \left(4\sin\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right); 5{,}5 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{30}\cdot t\right)\right)$ dezelfde cirkel oplevert. Waar zit het bakje nu als $t = 0$?

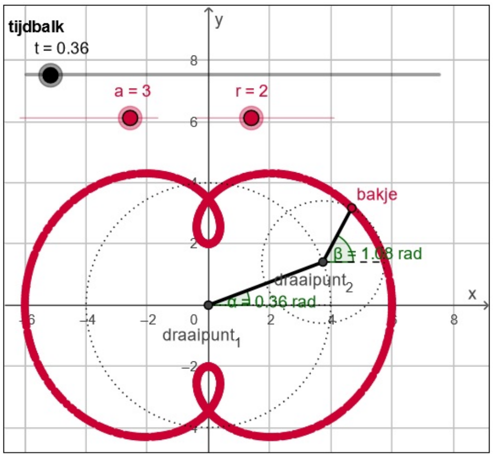
De meest logische plek voor het bakje op $t = 0$ is het punt $(0; 1{,}5)$, het instappunt.

b Pas de parametervoorstelling zo aan, dat dit het geval is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

In de applet zie je de beweging van de ‘Polyp’ op de kermis.
Stel in $r = 2$ en $a = 3$. Dan zijn de stralen van de cirkels 4 m en 2 m en is de hoeksnelheid waarmee de kleine cirkel doorlopen wordt 3 keer die waarmee de grote cirkel doorlopen wordt. Stel een mogelijke parametervoorstelling voor de kromme op.



Figuur 7

Antwoord

Kies het assenstelsel zoals je in de figuur ziet. Dan is draaihoek α gelijk aan t en draaihoek β gelijk aan $3t$.

Voor het tweede draaipunt geldt:
$(x(t), y(t)) = (4\cos(t), 4\sin(t))$.

Voor het bakje geldt:
$(x(t), y(t)) = (4\cos(t) + 2\cos(3t), 4\sin(t) + 2\sin(3t))$.

Dit is meteen de parametervoorstelling van de kromme die het bakje doorloopt. Met je grafische rekenmachine kun je deze kromme ook in beeld brengen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de ‘Polyp’ nagebootst. Neem weer $a = 3$ en $b = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat als je de tijd t ‘laat lopen’.

a Bekijk de parametervoorstelling van deze kromme. Maak de kromme ook op je grafische rekenmachine.

b In welk punt zit het bakje als $t = \frac{1}{2}\pi$? Laat zien hoe dit uit de parametervoorstelling volgt.

c Op welke zes tijdstippen gedurende de eerste complete beweging passeert het bakje de y-as? Gebruik je GR.

d De snelheid waarmee het bakje beweegt is nu niet overal hetzelfde, dat maakt het zitten in zo'n kermisattractie nu juist leuk. Waar is je baansnelheid het hoogst?

Opgave 9

Gebruik de applet van **Voorbeeld 3**. Stel nu in $a = 2$ en $r = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat.

a Welke parametervoorstelling hoort hier bij?

b Breng de kromme in beeld op je grafische rekenmachine. Bepaal de punten waarin de kromme de y-as snijdt.

c Laat zien, hoe je deze punten ook algebraïsch kunt vinden.

Verander nu de instelling voor r in $r = 3$.

d Wat verandert er?

Experimenteer met de applet als $a = 2$ door voor r verschillende waarden te kiezen.

e Bij welke r gaat de kromme door de oorsprong?

Opgave 10

Bekijk weer de applet in **Voorbeeld 3**. Stel nu in $a = -3$ en $r = 2$ en bekijk de kromme die ontstaat.

a Welke parametervoorstelling hoort hier bij?

b Breng deze kromme in beeld op je grafische rekenmachine en controleer daarmee je antwoord bij a.

c Op welke tijdstippen zit het bakje het verst van het centrale draaipunt O verwijderd? Laat zien, dat het bakje dan 6 m van O af zit. Hoe kun je dit vanuit de parametervoorstelling beredeneren?

d Experimenteer nog met andere waarden van zowel a als r. Probeer vooraf de aantallen lussen te beredeneren. En ook of het bakje weer door O zal gaan.

Verwerken

Opgave 11

De plaats $P(x,y)$ in een assenstelsel van een steentje dat aan een strak gespannen touw rondslingert wordt gegeven door $x(t) = 10 + 2\sin(4t)$ en $y(t) = 5 + 2\cos(4t)$. Hierin is t in seconden en zijn x en y in m.

a Breng de baan van het steentje in beeld op je grafische rekenmachine. Laat het steentje twee maal ronddraaien. Hoe moet je t dan instellen?

b Waar in het assenstelsel staat de persoon die het steentje laat ronddraaien?

c Hoe lang is het touw?

d Waarom draait het steentje volgens deze formule eenparig rond?

e Met welke snelheid draait het steentje rond? Linksom of rechtsom?

f De snelheid waarmee het steentje ronddraait lijkt constant te zijn. Toch verandert er iets aan de snelheid. Wat?

g Kun je deze baan ook beschrijven door middel van een vergelijking in x en y? Zo ja, welke vergelijking is dat dan?

Opgave 12

Een punt P beweegt in een Oxy-assenstelsel. De plaats van P wordt gegeven door $P(x,y) = (8\cos(t), 4\sin(t))$ met t in seconden.

a Breng de baan van punt P in beeld op je grafische rekenmachine.

b Waaraan zie je dat dit geen eenparige cirkelbeweging betreft?

c De hoeksnelheid van $\overrightarrow{OP}$ is wel constant, maar de baansnelheid van P niet. Licht dit toe.

d Bereken algebraïsch de punten waarvoor $y = 1$. Geef de x-coördinaten in twee decimalen nauwkeurig.

e Bereken algebraïsch de punten op de kromme die precies 6 cm van O af liggen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Een punt P doorloopt eenparig een cirkel met een straal van 5 cm om middelpunt $M(3,4)$. De hoeksnelheid van MP is 2 rad/s.

a Welke parametervoorstelling kun je voor deze beweging opstellen? Schrijf minstens twee mogelijkheden op.

b De baan die het punt P doorloopt kun je ook beschrijven met een vergelijking in x en y. Welke vergelijking is dat?

Opgave 14

Je ziet hier telkens een periodieke beweging beschreven door een parametervoorstelling. In alle gevallen loopt t van 0 tot 2π. Geef elke keer aan of de beweging een eenparige cirkelbeweging is, of de bewegingsrichting positief of negatief is en welk punt het startpunt van de beweging is.

a $P_1(x,y) = (4 + 4\cos(t), 6 + 4\sin(t))$

b $P_2(x,y) = (4\cos(t), 2\sin(t))$

c $P_3(x,y) = (4\cos(t), 4\sin(2t))$

d $P_4(x,y) = (6 - 4\sin(t), 6 - 4\cos(t))$

Opgave 15

Gegeven is met t in $[0,2\pi]$ de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \cos\left(t^2\right) \\ y(t) = \sin\left(t^2\right) \end{cases}$.

a Breng de kromme in beeld op je grafische rekenmachine. Neem voor t een stapgrootte van 0,1. Is de figuur die je krijgt eigenlijk wel correct?

b Is hier sprake van een eenparige cirkelbeweging? Licht je antwoord toe.

c Licht toe waarom alle punten van deze kromme toch op een cirkel liggen. Welke straal heeft deze cirkel?

Toepassen

Opgave 16: Banen van hemellichamen

Johannes Kepler (1571—1630) was een Duits wiskundige en astronoom die aantoonde dat de banen van hemellichamen elliptisch zijn. Hiertoe ontwikkelde hij een wiskundig model om deze banen te beschrijven.

Een (heel erg versimpeld) model van een elliptische baan van een planeet P wordt gegeven door:
$P(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$
Hierin zijn a en b positieve constanten. Parameter t wordt de 'excentrieke anomalie' genoemd, en loopt van 0 tot 2π.

a Wat gebeurt er als $a = b$?

b Toon aan dat de parameterisering van de baan van P voldoet aan de standaardvergelijking voor een ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

c Stel $a \neq b$. Is de hoek van $\overrightarrow{OP}$ gelijk aan t? Toon met een schets aan waarom wel of niet.

Opgave 17: The London Eye

'The London Eye' is een reuzenrad met een diameter van 135 m en er zitten 32 gondels aan waarin je als bezoeker de rondrit kunt meemaken. Je stapt op de begane grond in. In de loop van 30 minuten draai je één keer rond. Laat $P(x,y)$ het draaipunt van de gondel zijn waar je instapt op $t = 0$. Neem de tijd t in minuten en het assenstelsel zo, dat de x-as de begane grond is en de y-as een lijn loodrecht op de x-as en door het draaipunt M van dit reuzenrad.

Figuur 8

a Waarom is hier sprake van een eenparige cirkelbeweging?

b Stel een parametervoorstelling op van de cirkel die P doorloopt.

c Met welke hoeksnelheid draait $\overrightarrow{MP}$ en welke bewegingssnelheid in km/h heeft P?

d Bereken algebraïsch in één decimaal nauwkeurig hoeveel minuten per ronde punt P boven de 120 m zit.

Testen

Opgave 18

Punt P beweegt in het Oxy-vlak. Voor de baan die P doorloopt geldt
$P(x,y) = (1 + 2\sin(\pi t), 4 + 2\cos(\pi t))$ met t in seconden en x en y in m.

a In welk punt begint de beweging op $t = 0$?

b Breng de volledige baan die P één keer aflegt in beeld op je GR. Welke waarden moet P daarvoor aannemen?

c Met welke hoeksnelheid draait $\overrightarrow{OP}$ en welke bewegingssnelheid heeft P?

d Leg uit waarom de snelheidsvector toch niet constant is.

e Bereken algebraïsch de punten van de baan van P die op de y-as liggen.

f Welke punten van de kromme liggen op de lijn met vergelijking $y = 2x$? Bereken hun coördinaten exact.

Practicum

Met je grafische rekenmachine kun je heel goed **krommen tekenen**. In dit practicum kun je nalezen hoe dat gaat.

- **Parameterkrommen met de TI84**
- **Parameterkrommen met de TInspire**
- **Parameterkrommen met de Casio fx-CG50**
- **Parameterkrommen met de HPprime**
- **Parameterkrommen met de NumWorks**

Wil je een cirkel ook echt als cirkel zien, dan moet je op beide assen dezelfde eenheid gebruiken. Dat regel je via de instellingen van deze rekenmachines.

Het is meestal mooier om met **GeoGebra** te werken als je krommen in beeld wilt brengen. Op de Math4all website kun je met GeoGebra leren werken via Extra > Practica > GeoGebra.
Een **kromme** voer je in door in de invoerbalk eerst t=0 te typen, je krijgt dan een variabele t die je (klikken met de rechter muisknop en ‘Object tonen’ kiezen) als schuifbalk kunt laten zien.
Vervolgens typ je op de invoerbalk bijvoorbeeld P=(sin(2*t),sin(t)) en je krijgt een punt P dat gaat bewegen zodra je t verschuift. De gewenste waarden voor t kun je instellen (rechter muisknop, ‘Eigenschappen’).
Wil je de kromme meteen in zijn geheel zien, dan maak je GEEN schuifbalk voor t, maar voer je in: Kromme[sin(2*t),sin(t),t,0,2*pi].
In plaats van t kun je ook een andere letter kiezen, als hij maar niet bij een schuifbalk hoort.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.