3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Parametervoorstellingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vectorvoorstelling, parametervoorstelling met name van lijnen
- vector/parametervoorstellingen van cirkels
- de hoek tussen twee lijnen berekenen — loodlijn en middelloodlijn — omgeschreven cirkel van een driehoek
- raaklijn aan een cirkel — elkaar rakende cirkels
- hoek tussen een lijn en een cirkel — hoek tussen twee snijdende cirkels — afstand punt of lijn tot cirkel

Activiteitenlijst

- lijnen beschrijven met vector/parametervoorstellingen — vergelijkingen van lijnen omschrijven naar vector/parametervoorstellingen en omgekeerd
- vergelijkingen van cirkels omschrijven naar vector/parametervoorstellingen en omgekeerd — snijpunten van lijnen en cirkels berekenen
- de hoek tussen twee lijnen berekenen — een loodlijn door een gegeven punt maken op een gegeven lijn en beschrijven met een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling — een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling van een middelloodlijn maken — de afstand van een punt tot een lijn, tussen twee evenwijdige lijnen, berekenen
- een vergelijking en/of een vector/parametervoorstelling opstellen van een raaklijn aan een cirkel in een punt van die cirkel — vergelijkingen en/of vector/parametervoorstellingen opstellen van de raaklijnen aan een cirkel in een punt buiten die cirkel
- de hoek berekenen waaronder een lijn en een cirkel of twee cirkels elkaar snijden — de afstand van een punt of een lijn tot een cirkel berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde.
Hij werkte vooral in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door de door hem bedachte **quaternionen**, een uitbreiding van de complexe getallen (zie bij wiskunde D).

Figuur 1 bron: Wikipedia

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 12x - 10$ en c_2 met middelpunt $M_2(4,2)$ en straal $\sqrt{10}$.

a Bereken het middelpunt en de straal van c_1.

b Bereken de snijpunten van c_1 en c_2.

c Bereken de afstand van M_2 tot cirkel c_1.

d Bereken de hoek waaronder beide cirkels elkaar snijden in graden nauwkeurig.

e Door $A(0,4)$ gaan twee lijnen die c_2 raken. Stel van elk van deze twee lijnen een vergelijking op.

f De raaklijn aan c_1 in het punt $P(7,5)$ snijdt de x-as in Q.
Bereken de coördinaten van Q.

g Bereken de exacte afstand van lijn PQ tot punt M_2.

Opgave 2

De afstand van een punt tot een lijn kun je ook berekenen met behulp van een cirkel. Neem $O(0,0)$ en $l : x + 2y = 6$.

a Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt O en straal r.

b l moet raken aan c. Bereken de exacte waarde van r.

Je kunt de gevraagde afstand ook berekenen door te werken met gelijkvormige driehoeken. Daarbij gebruik je de snijpunten van l met de twee assen. Noem het snijpunt van l met de x-as A en dat met de y-as B. OC is het lijnstuk dat de afstand van O tot l voorstelt.

c Bereken nu $|OC|$ met behulp van gelijkvormigheid.

Neem nu voor l een willekeurige lijn $ax + by = c$.

d Laat zien dat: $\text{d}(O,l) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

e Gebruik deze formule om de afstand van O tot $l : x + 2y = 6$ uit te rekenen.

Opgave 3

Cirkel c snijdt van de lijn $y = 4$ een lijnstuk met lengte 4 af, gaat door $P(-5,2)$ en heeft een middelpunt M op de x-as. Geef een vergelijking op van c.

Opgave 4

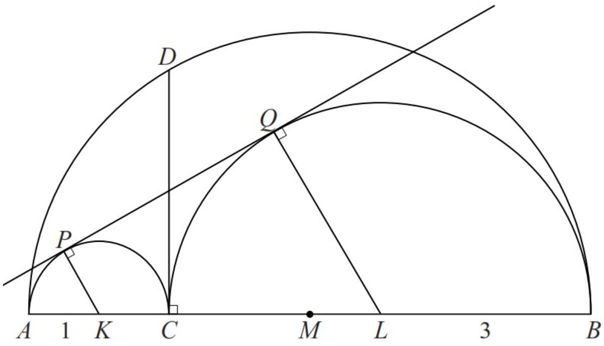
Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 2x + 3$ en de lijn $l : y = ax$. De snijpunten van l en c zijn A en B.

a Neem $a = 2$. Toon aan dat $|OA| \cdot |OB| = 3$.

b Bewijs dat voor elke a geldt: $|OA| \cdot |OB| = 3$.

Opgave 5

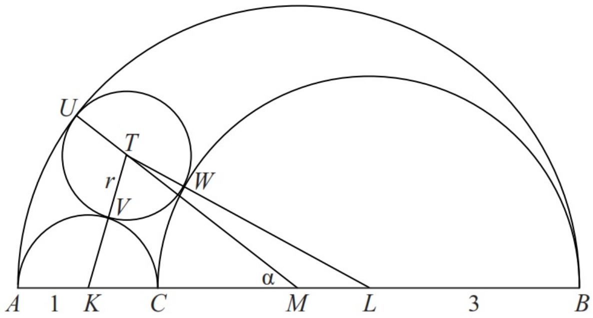
Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB en straal 4. Het middelpunt van deze cirkel is M. Op lijnstuk AB ligt het punt C zo dat $AC = 2$. AC en CB zijn de middellijnen van twee andere halve cirkels met stralen 1 en 3. De middelpunten van deze twee halve cirkels zijn respectievelijk K en L. Alle halve cirkels liggen aan dezelfde kant van AB. De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste halve cirkel in punt D. Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de twee binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn. PQ staat dus loodrecht op KP en op LQ.



Figuur 2

a Toon aan dat CD en PQ exact even lang zijn.

Tussen de drie halve cirkels past precies één cirkel die raakt aan elk van de drie gegeven halve cirkels. Deze cirkel heeft middelpunt T en straal r. De raakpunten van deze cirkel met de drie halve cirkels zijn U, V en W. $\angle TMK = \alpha$.



Figuur 3

b Toon aan dat $\cos(\alpha) = \frac{12-5r}{12-3r}$.

In driehoek MLT geldt op dezelfde manier $\cos(\alpha) = \frac{7r-4}{4-r}$.

c Bereken de exacte waarde van r.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2012, tweede tijdvak)

Opgave 6

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. In dit vierkant zijn getekend:

- de kwartcirkel c met middelpunt A en eindpunten B en D;
- de kwartcirkel d met middelpunt B en eindpunten A en C;
- het vierkant $PQRS$ met P en Q op AB, R op c en S op d.

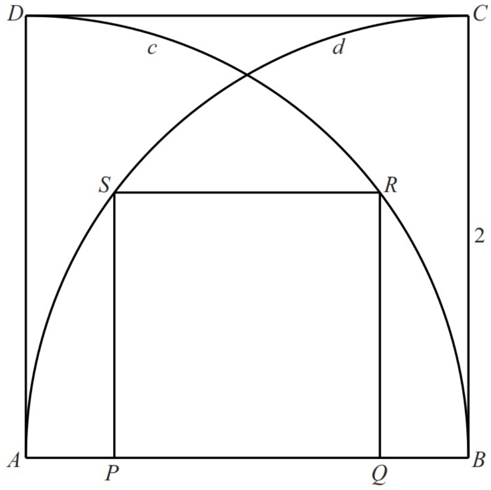
Er geldt: $PQ = \frac{6}{5}$.

a Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Aan de tekening wordt een cirkel met middelpunt M en straal r toegevoegd, die RS en de beide kwartcirkels raakt. De diameter van deze cirkel is kleiner dan RS.

b Bereken exact de straal r.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)



Figuur 4

Toepassen

Opgave 7: Bissectrice

De deellijn (of bissectrice) van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. De lijnen $l : y = 0$ en $m : y = 2x$ maken een scherpe hoek met elkaar. Punt $P(x, y)$ is een punt van de deellijn van deze hoek.

a Stel een vergelijking op van deze deellijn (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig).

b Toon aan dat elk punt van deze deellijn dezelfde afstand heeft tot lijn l als tot lijn m.

Opgave 8: Een cirkel uit een driehoek

Uit een gelijkzijdige driehoekige lap stof met zijden van 4 dm wil je een zo groot mogelijke cirkelvormige lap stof snijden.

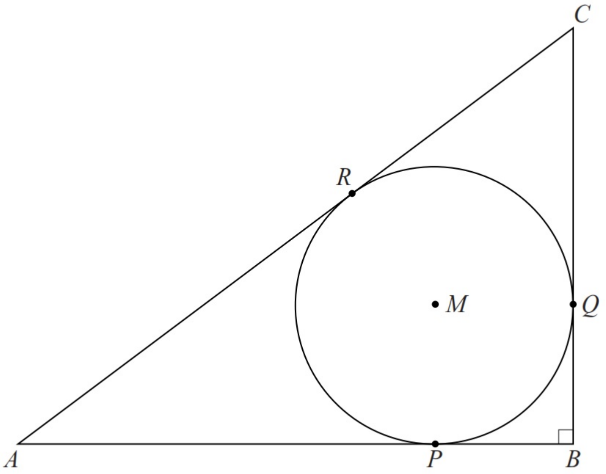
Maak een assenstelsel met $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C(0,4)$ en bereken de straal van de ingeschreven cirkel.

Examen

Opgave 9: Cirkels in een driehoek

Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R. M is het middelpunt van deze cirkel.

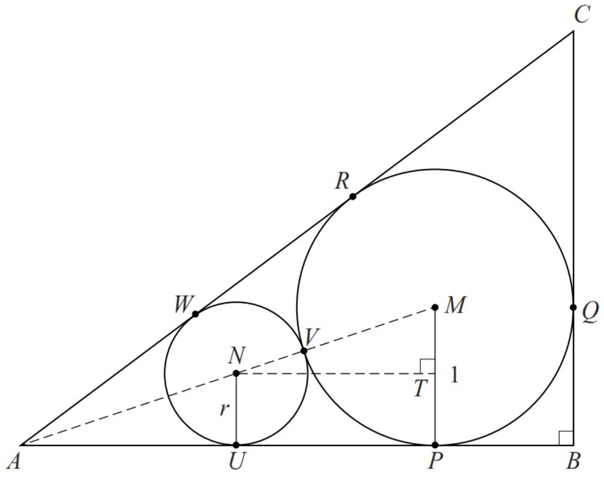


Figuur 5

De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

a Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T.



Figuur 6

Er geldt dat $AU = 3r$.

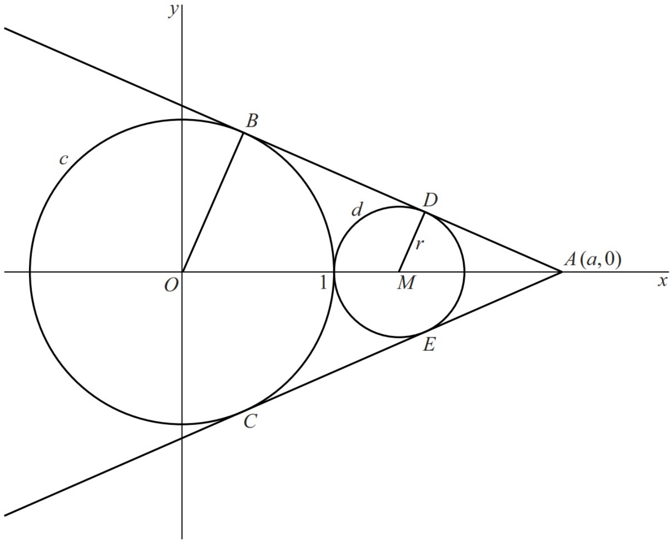
b Bewijs dit.

c Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2014, eerste tijdvak)

Opgave 10: Ingesloten cirkel

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a,0)$ met $a > 1$. Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C. De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1,0)$. Cirkel d heeft middelpunt M. Zie de figuur.



Figuur 7

Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt: $r = \frac{a-1}{a+1}$.

a Bewijs dit.

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

b Bereken exact de waarden van p en q.

(naar: pilotexamen wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.