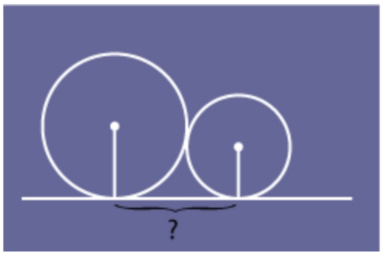
3.5 Berekeningen met cirkels

Inleiding

Met wat je tot nu toe hebt geleerd over lijnen en cirkels en een beetje meetkundig redeneren kun je een puzzel zoals deze hiernaast wel oplossen. Dit noem je een sangaku en zo'n puzzel stamt uit het Japan in de tijd van de 17e tot de 19e eeuw. Maar ook kun je hoeken tussen een lijn en een cirkel en de hoeken tussen twee cirkels berekenen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de hoek berekenen waaronder een lijn en een cirkel of twee cirkels elkaar snijden;
- afstanden berekenen tussen een lijn en een lijn en/of cirkel;
- berekeningen met lijnen en cirkels uitvoeren.

Voorkennis

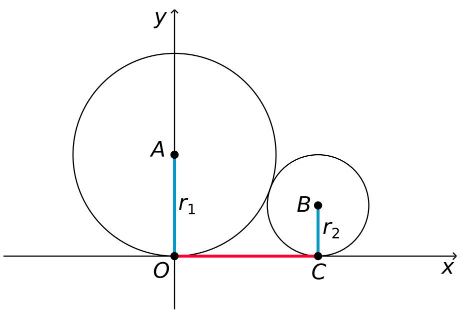
- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen met behulp van de discriminantmethode en met behulp van loodrechte stand.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je twee cirkels die de x-as raken in O en C en elkaar raken. Hun middelpunten zijn A en B en hun stralen zijn r_1 en r_2.

Druk de lengte van het lijnstuk OC uit in r_1 en r_2.



Figuur 2

Uitleg

Je hebt nu de basistechnieken over lijnen en cirkels geleerd. Tijd om dit toe te passen bij berekeningen waarin deze figuren voorkomen. Een voorbeeld is het berekenen van de hoek waaronder een lijn een cirkel snijdt.

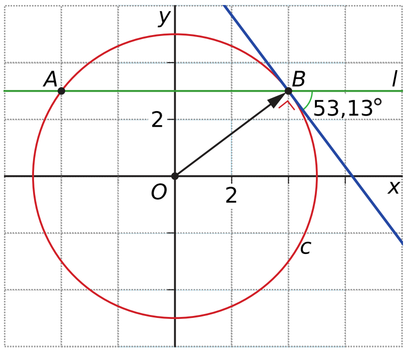
Bekijk de applet.

Hier zie je de lijn $l : y = 3$ die de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ snijdt. Je wilt de hoek berekenen die l en c met elkaar maken.

Eerst bereken je beide snijpunten: $A(-4,3)$ en $B(4,3)$. De cirkel heeft middelpunt $O(0,0)$.
Nu ga je de vergelijking van de raaklijn opstellen in (bijvoorbeeld) B.

Omdat $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

De lijn $y = 0$ heeft een richtingsvector van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De hoek tussen beide lijnen is daarom 53,13°. Dit is tevens de hoek tussen de lijn en de cirkel.



Figuur 3

Je kunt ook de hoek tussen twee cirkels berekenen en de afstand van een punt tot een cirkel, van een lijn tot een cirkel en tussen twee cirkels.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de hoek wordt berekend waaronder een gegeven lijn een gegeven cirkel snijdt.

a Bereken zelf de snijpunten van l en c en de gevraagde hoek.

b Waarom hoef je maar één hoek te berekenen?

c Bereken zelf de hoek die lijn en cirkel met elkaar maken in punt A.

Opgave 2

De lijn l met vergelijking $y = x$ en de cirkel c middelpunt $M(3,0)$ en door het punt $P(4,2)$ snijden elkaar in A en B. Bereken de hoek waaronder l en c elkaar snijden in graden nauwkeurig. Rond af op één decimaal.

Opgave 3

In de **Uitleg** zie je hoe de hoek wordt berekend waaronder een gegeven lijn een gegeven cirkel snijdt.

a Beschrijf hoe je de hoek tussen twee cirkels berekent.

b Wat versta je onder de afstand van een punt tot een cirkel? En hoe bereken je die, denk je?

c Wat versta je onder de afstand van een lijn tot een cirkel? En hoe bereken je die, denk je?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **hoek tussen twee lijnen** versta je de hoek tussen hun twee richtingsvectoren. Die hoek kun je met het inproduct van twee vectoren berekenen.

Onder de **hoek tussen een lijn en een cirkel** versta je de hoek tussen de richtingsvector van de lijn en de richtingsvector van de raaklijn in één van beide snijpunten.

Onder de **hoek tussen twee cirkels** versta je de hoek tussen de richtingsvectoren van de raaklijnen aan deze cirkels in één van beide snijpunten.

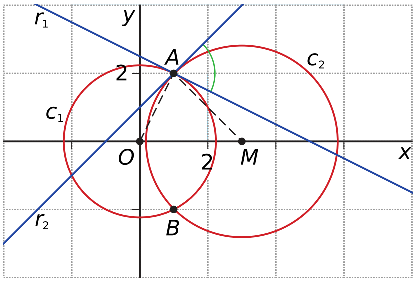
De **afstand tussen een punt en een cirkel** c met middelpunt M en straal r bereken je door van de afstand van het punt tot M de straal af te trekken: $\text{d}(P,c) = |PM| - r$.

De **afstand tussen een twee cirkels** c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en straal r_1 en r_2 bereken je door van de afstand tussen beide middelpunten de stralen af te trekken: $\text{d}(c_1,c_2) = |M_1M_2| - (r_1 + r_2)$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De twee cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 5$ en c_2: $x^2 + y^2 = 6x - 1$ snijden elkaar in de punten A en B. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.



Figuur 4

Antwoord

Eerst bereken je de snijpunten $A(1,2)$ en $B(1,-2)$.
Dan stel je de raaklijn aan c_1 en die aan c_2 op in één van die punten, zeg A.

- Het middelpunt van c_1 is $O(0,0)$ en $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  De raaklijn aan c_1 in A heeft als richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Het middelpunt van c_2 is $M(3,0)$ en $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  De raaklijn aan c_2 in A heeft als richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De hoek tussen de raaklijnen bereken je met het inproduct van de twee richtingsvectoren van de raaklijnen. Je vindt ongeveer 72°.

De hoek tussen de raaklijnen is gelijk aan de hoek tussen de twee stralen naar de raakpunten. Daarmee kun je de berekening wat inkorten.

Opgave 4

De twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 10$ en $c_2 : x^2 + y^2 = 8y - 14$ snijden elkaar in de punten A en B. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

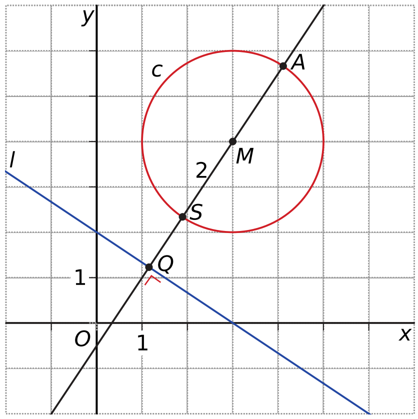
Opgave 5

De cirkel c_1 met middelpunt $M_1(1,2)$ en straal 5 en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(4,3)$ en straal $\sqrt{5}$ snijden elkaar in de punten P en Q. Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bereken de afstand van lijn $l: 2x + 3y = 6$ tot cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ en straal 2.



Figuur 5

Antwoord

Het gaat om de kortste lengte van lijnstuk QS. Dat bereik je als lijn MQ loodrecht op l staat.
De vergelijking van die lijn MQ is: $3x - 2y = 1$.
(Ga dat na!). Deze lijn snijden met $2x + 3y = 6$ geeft de coördinaten van Q. Het punt Q dat bij de kortste afstand $|QS|$ hoort is $\left(\frac{45}{39}, \frac{16}{13}\right)$.

Bereken nu $|MQ|$ en trek van deze de lengte van de straal van de cirkel af.

Dus $|MQ| = \sqrt{\left(4 - \frac{16}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{45}{39}\right)^2} - 2 = 1\frac{1}{3}$.

Je kunt ook de coördinaten van S berekenen door c_1 te snijden met l.

Hiermee bereken je met behulp van de stelling van Pythagoras de lengte van $|SQ|$. Dan vind je ook $|SQ| = 1\frac{1}{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 10$ en de lijn $l : x + y = 2$.

a Bereken algebraïsch de afstand van O tot cirkel c in twee decimalen nauwkeurig.

b Wat versta je onder de afstand van lijn l tot cirkel c? Bereken ook deze afstand. Bekijk eventueel het voorbeeld nog eens.

c Bereken de afstand tussen cirkel c en de cirkel om O en door $(1,1)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

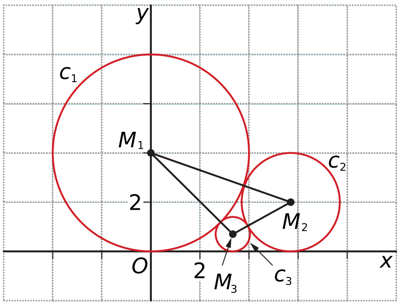
a Bereken de afstand tussen de twee lijnen $l : 2x + 4y = 7$ en $m : y = 6 - 0{,}5x$.

b Wanneer heeft het zin om te vragen naar de afstand tussen twee rechte lijnen? Hoeveel bedraagt die afstand in alle andere gevallen?

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt $M_1(0,4)$ en straal 4 en de cirkel c_2 met straal 2 die zowel de x-as als c_1 raakt. Er is een cirkel c_3 die zowel beide gegeven cirkels als de x-as raakt.

Bereken de straal van c_3.



Figuur 6

Antwoord

Stel je voor dat cirkel c_3 een straal van lengte r heeft. Het middelpunt van c_2 is M_2 en dat van c_3 is M_3.

Maak nu drie rechthoekige driehoeken met de rechthoekszijden evenwijdig aan de assen, waarvan M_1M_2, M_1M_3 en M_3M_2 de hypotenusa's zijn. Je kunt dan met behulp van de stelling van Pythagoras afleiden:

$$\sqrt{(4+r)^2 - (4-r)^2} + \sqrt{(2+r)^2 - (2-r)^2} = \sqrt{(4+2)^2 - (4-2)^2} = \sqrt{32}.$$

En uit deze vergelijking kun je de waarde van r berekenen.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt alleen een globale oplossing van het op te lossen probleem beschreven.

a Maak zelf een tekening en laat zien hoe je aan de vergelijking kunt komen die in het voorbeeld staat.

b Los deze vergelijking exact op.

c Stel een vergelijking op van cirkel c_3.

Opgave 9

Je kunt het probleem in **Voorbeeld 3** ook oplossen met een meer algebraïsche aanpak en meteen de coördinaten van M_3 berekenen.

a Licht toe dat uit de gegevens volgt $\text{d}(M_1,M_3) = 4 + r$, $\text{d}(M_2,M_3) = 2 + r$ en $\text{d}(M_3, y = 0) = r$.

b Van punt M_2 weet je de x-coördinaat niet. Die kun je berekenen uit $\text{d}(M_1,M_2) = 6$. Laat zien hoe dat gaat.

c Laat zien hoe je nu M_3 kunt berekenen vanuit de drie eigenschappen van dit punt die je bij a hebt opgemerkt.

Verwerken

Opgave 10

Een cirkel met een straal van $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ snijdt de y-as.

a Bereken de hoek waaronder deze cirkel de y-as snijdt.

b Bereken de hoek waaronder een cirkel met straal $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ de cirkel met middelpunt $(-2,0)$ en straal $\sqrt{5}$ snijdt.

Opgave 11

Bereken (eventueel in twee decimalen nauwkeurig) de afstand van

a punt $P(2,3)$ tot lijn $l : 4x - 5y = 40$

b punt $P(2,3)$ tot cirkel $c : (x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$

c lijn l tot cirkel c

Opgave 12

Een cirkel snijdt de x-as onder een hoek van 45° in de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$.
Bereken het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Opgave 13

De driehoek ABC heeft hoekpunten $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

a Toon aan dat driehoek ABC gelijkzijdig is.

b De ingeschreven cirkel van deze driehoek is de cirkel die alle drie de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 14

In een cartesisch assenstelsel is gegeven de cirkel c_1 met parametervoorstelling $x(t) = 6\cos(t)$ en $y(t) = 6\sin(t)$. Binnen deze cirkel ligt een tweede cirkel c_2 die behalve c_1 ook de beide coördinaatassen raakt. De coördinaten van alle raakpunten zijn groter of gelijk aan 0.

Stel een vergelijking op van c_2.

Opgave 15

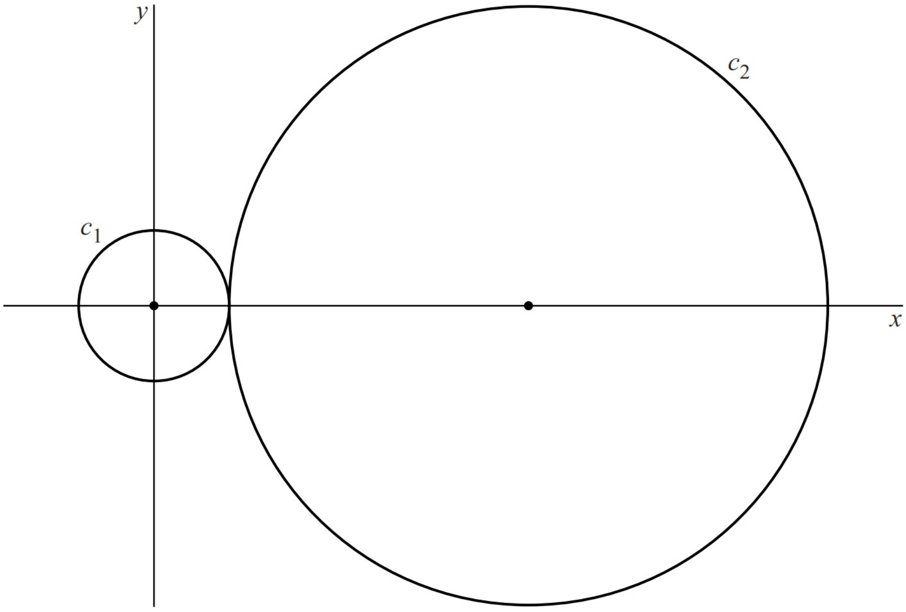
In een cartesisch assenstelsel is vierkant $OABC$ gegeven door $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $C(0,4)$. In dit vierkant zit een kwart cirkel met middelpunt O en straal 4.

Stel een vergelijking op van de cirkel c die de gegeven kwart cirkel, lijnstuk OB en lijnstuk AB raakt.

Toepassen

Opgave 16: Raakcirkel en raaklijnen

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x - 15)^2 + y^2 = 144$. In de figuur zijn c_1 en c_2 getekend.



Figuur 7

Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y-as raakt de beide cirkels c_1 en c_2.

a Stel een vergelijking op van c_3.

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

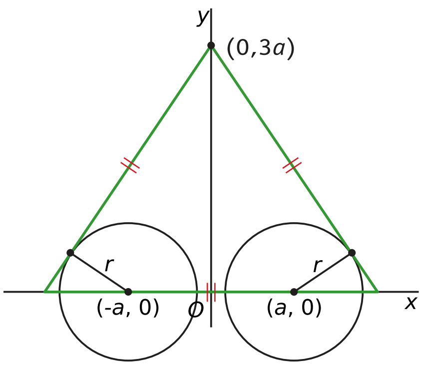
b Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

(bron: pilotexamen wiskunde B vwo in 2013, tweede tijdvak)

Opgave 17: Raaklijnen aan twee cirkels

Gegeven zijn twee cirkels met middelpunten $(-a,0)$, $(a,0)$ en straal r. Gegeven is ook punt $(0,3a)$.
Door $(0,3a)$ gaan twee raaklijnen aan de cirkels, zodat de middelpunten van de cirkels binnen de daardoor ontstane driehoek liggen. De driehoek die beschreven wordt door $(0,3a)$ en de snijpunten van de raaklijn met de x-as is gelijkzijdig. Bekijk de figuur.

Druk r uit in a. Rond af op twee decimalen.



Figuur 8

Testen

Opgave 18

Een cirkel c met het middelpunt op de lijn $l : x + 2y = 12$ raakt de x-as en de y-as.

a Stel een vergelijking van deze cirkel op.

b Bereken de hoek waaronder deze cirkel de lijn $k : x + y = 12$ snijdt.

c Bereken de afstand van deze cirkel tot de lijn door $P(0,12)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 19

De punten $A(-2,0)$, $B(0,-4)$, $C(2,0)$ en $D(0,4)$ zijn hoekpunten van een ruit $ABCD$. De ingeschreven cirkel van deze ruit is de cirkel die alle vier de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.