2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt het onderwerp **Vectoren en goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vector, lengte en richtingshoek — componenten van een vector
- sinus, cosinus, tangens ook van hoeken groter dan 90°
- de sinusregel
- de cosinusregel
- het inproduct van twee vectoren

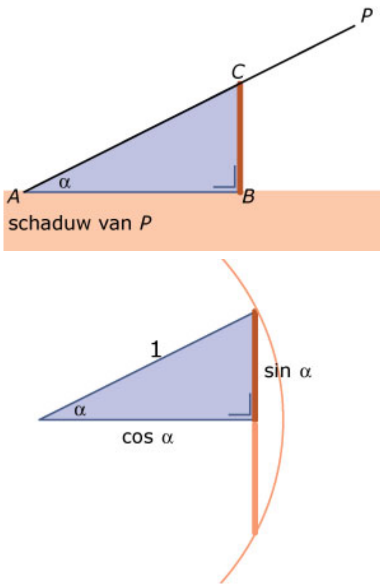
Activiteitenlijst

- componenten van een vector bepalen door meting/berekening, positieve/negatieve componenten onderscheiden
- componenten van vectoren berekenen m.b.v. sin en cos — sin, cos en tan van hoeken (ook) boven 90° bepalen
- de sinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- de cosinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- het inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen

Achtergronden

Met een staaf van een bepaalde lengte werden in de oude culturen de posities van de zon, de maan en andere hemellichamen vastgelegd. Bij elk punt aan de hemel hoort een bepaalde 'schaduw' en een bepaalde hoek. Er is een verband tussen hoek A en punt P aan de hemel. Goniometrie (hoekmeting) speelt daarom van oudsher een grote rol in de sterrenkunde.

De beroemde Alexandrijnse astronoom **Ptolemaeus** gaf rond 150 na Chr. in zijn boek 'Almagest' een tabel de lengtes van de koorden bij bepaalde cirkelhoeken. De Indiërs gaven in de 7de eeuw bij een gegeven middelpuntshoek de lengte van de halve koorde. Via het Arabisch is het woord voor 'halve koorde' in de 12de eeuw in het Latijn vertaald als 'sinus' (wat 'bocht' of 'boezem' betekende). Het woord 'cosinus' is de afkorting voor 'complementi sinus' (de sinus van het complement). Met 'complement' wordt de hoek bedoeld die de gegeven hoek aanvult tot 90°.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn deze vectoren door hun lengte v en hun richtingshoek α. Bereken de lengte van de x-component en de y-component. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen.

a $v = 20$ en $\alpha = 45°$

b $v = 20$ en $\alpha = 115°$

c $v = 20$ en $\alpha = 300°$

d $v = 20$ en $\alpha = 270°$

Opgave 2

Bereken alle overige lengten van zijden en hoeken van ΔABC als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen):

a $a = 5$, $b = 6$ en $c = 4$

b $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120°$

c $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120°$

d $c = 12$, $\alpha = 50°$ en $\beta = 60°$

e $a = 12$, $b = 6$ en $\alpha = 90°$

f $a = b = 10$ en $\beta = 81°$

Opgave 3

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenover liggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB. Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65°$ en $\angle ABP = 54°$.

Opgave 4

Gegeven is een driehoek waarvan de lengtes van de zijden a, b en c zijn. Bereken in de volgende gevallen de grootte van de hoek tegenover de zijde met lengte a.

a $a^2 = b^2 + c^2$

b $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

c $a^2 = b^2 + c^2 + 0{,}5bc$

Opgave 5

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,50 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Opgave 6

Gegeven zijn de lijn l met vergelijking $3x - 5y = 12$ en de punten $A(0,4)$ en $B(3,0)$.

a Bereken de hoek die lijn l met de lijn m die door de punten A en B gaat.

b Laat zien dat vectoren van de vorm $\begin{pmatrix} 4k \\ 3k \end{pmatrix}$ loodrecht staan op $\overrightarrow{AB}$.

c Punt $C(4,2)$ is het derde hoekpunt van ΔABC. Laat zien dat deze driehoek rechthoekig is.

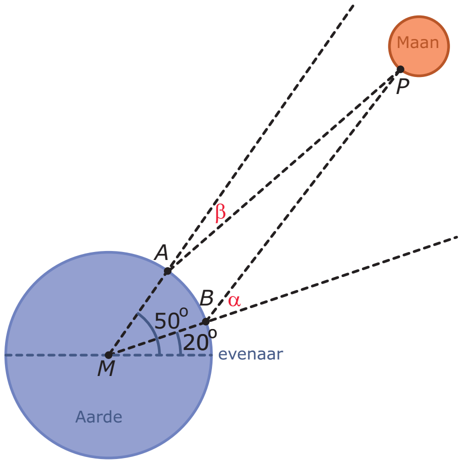
Opgave 7

In elke driehoek deelt de deellijn van een hoek de overstaande zijde in stukken die zich verhouden zoals de aanliggende zijden van die hoek. Teken maar eens een driehoek ABC met daarin de deellijn CD van hoek C. Punt D ligt zo op de overstaande zijde AB, dat $AD : BD = AC : BC$. Bewijs deze stelling.

Toepassen

Opgave 8: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M, A, B en P liggen in één vlak. Je meet de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.

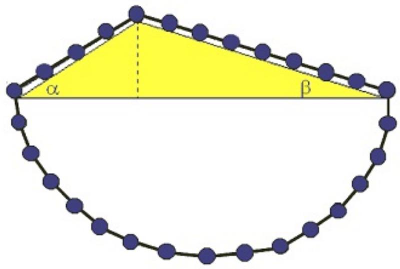


Figuur 2

Opgave 9: Clootcrans

In een tijd dat krachten nog niet als vectoren werden ontbonden bedacht Simon Stevin wat de kracht moet zijn die een massa uitoefent op een helling. Hij deed dat niet door een experiment, maar door een simpele redenering.

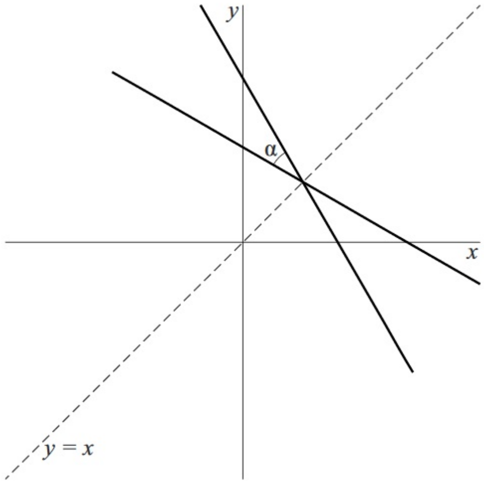
Hang een ketting van kralen over een punt dat twee hellingen verbindt. Welke kracht oefent de ketting uit op het punt, vanaf links en vanaf rechts? Het vrij hangende gedeelte trekt aan beide kanten even hard. De ketting beweegt niet, dus het gewicht van de ketting links is evenredig met de lengte van de helling links. De kracht die dat gewicht dan effectief uitoefent moet gelijk zijn aan de kracht die het rechterstuk uitoefent. Dus moet die kracht evenredig zijn met de lengte van de andere zijde. Dus verhouden de krachten zich omgekeerd met de lengtes van de hellingen. Je kunt dit ook controleren door de krachten te ontbinden in vectoren. En dan de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe dat gaat. (Zie ook: **Clootcransbewijs in Wikipedia**)



Figuur 3

Examen

Opgave 10: Gespiegelde lijn



Figuur 4

Een lijn met vergelijking $ax + y = b$, met $a > 0$, wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$. In de figuur zijn voor zekere waarden van a en b de lijn en zijn spiegelbeeld getekend. De hoek tussen de twee lijnen is α.

Er geldt: $\cos(\alpha) = \frac{2a}{a^2+1}$

Bewijs dit.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2014, eerste tijdvak)