2.4 De cosinusregel

Inleiding

De sinusregel werkt niet in alle situaties, dat heb je vast wel ontdekt. Als je bijvoorbeeld van een driehoek alle zijden weet, dan kun je hem construeren, de driehoek ligt daarmee volledig vast. Toch kun je niet met behulp van de sinusregel de hoeken ervan uitrekenen. In dit geval gebruik je de cosinusregel...

Je leert in dit onderwerp

- de cosinusregel gebruiken.

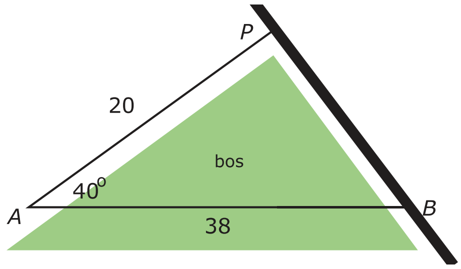
Voorkennis

- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan 90°.
- de sinusregel gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.



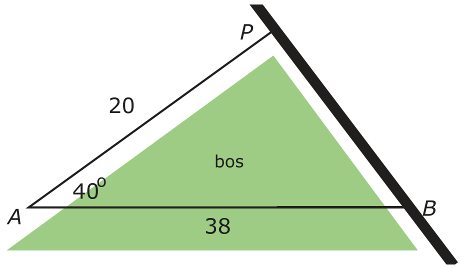
Figuur 1

a Bereken hoeveel verschil er is tussen de route AB door het bos en de route van A naar B via P en het fietspad.

b Waarom lukt dit met de sinusregel niet?

Uitleg

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.



Figuur 2

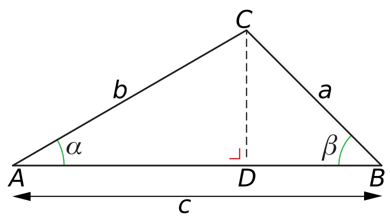
Nu is de sinusregel niet bruikbaar. Je kunt dit alleen oplossen door een hoogtelijn PD op AB te tekenen. Dat is nog behoorlijk wat rekenwerk. Handiger is het om de cosinusregel te gebruiken in ΔABP.

In elke driehoek ABC geldt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

In de driehoek bij de crosscountry-wedstrijd is $C = P$ en dus $\alpha = 40°$, $|PB| = a$, $|AB| = c$ en $|AP| = b$.

Even invullen en je vindt $PB = a \approx 26{,}1$ m.



Figuur 3

Opgave 1

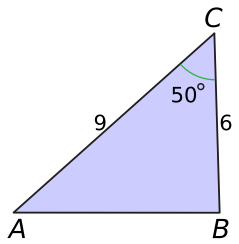
Bekijk in de **Uitleg** wat de cosinusregel is. Laat zien hoe je aan de lengte van PB komt met behulp van de cosinusregel.

Opgave 2

Bekijk driehoek ABC. Twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.

a Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek eruit?

b Bereken de derde zijde van deze driehoek.



Figuur 4

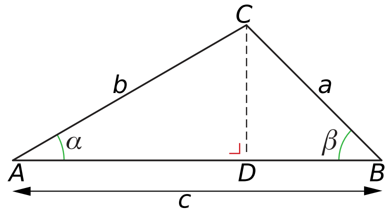
Opgave 3

Wil je in deze figuur a uitrekenen terwijl α, b en c bekend zijn, dan lukt dit niet met behulp van de sinusregel. Je kunt echter een verband afleiden tussen a, α, b en c.

a Laat zien, dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.

b Laat zien dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ door haakjes weg te werken.

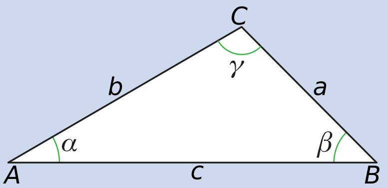
c Laat tenslotte zien, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.



Figuur 5

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 6

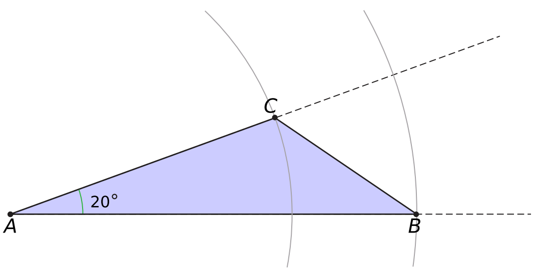
In elke ΔABC geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ en $|AC| = 4$. Bereken de lengte van BC.



Figuur 7

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Dit geeft: $|BC|^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(20°) = 6{,}89....$

Hieruit volgt: $|BC| \approx 2{,}6$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van ΔABC als gegeven is $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ cm en $|AC| = 4$ cm.

a Construeer zelf deze driehoek.

b Controleer met de cosinusregel dat inderdaad $|BC| \approx 2{,}63$.

Opgave 5

Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 6

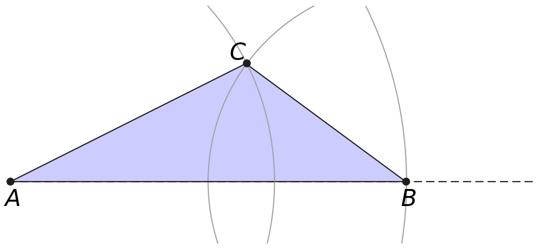
Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip vergaat. Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren gegaan. Natuurlijk probeer je rechtstreeks naar het eiland te peddelen, maar zodra je begonnen bent, komt er een dichte mist op. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je het in de gaten hebt, staat er een stroming die ervoor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naartoe gepeddeld was.
Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf? Teken eventueel eerst een schets.

Opgave 7

Van een ΔABC is gegeven dat $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ en $\angle C = 60°$. Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van ΔABC met $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ en $|BC| = 3$. Bereken de grootte van $\angle A$.



Figuur 8

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Dit geeft: $3^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$.

Dus: $9 = 52 - 48\cos(\angle A)$. En: $\cos(\angle A) = \frac{-43}{-48} \approx 0{,}8958$, zodat $\angle A \approx 26°$.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** de constructie van ΔABC met $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm en $|BC| = 3$ cm.

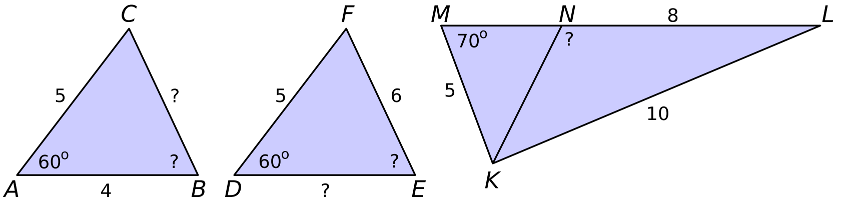
a Voer zelf de berekening van $\angle A$ uit.

b Bereken nu ook $\angle B$.

c Heb je opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?

Opgave 9

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



Figuur 9

Verwerken

Opgave 10

Elke ΔABC heeft zes afmetingen, te weten:

- de lengtes van de zijden $|AB| = c$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

Hier zijn steeds drie maten van ΔABC gegeven. Bereken de andere maten (exact waar mogelijk).

a $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65°$

b $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65°$

c $c = 150$, $\gamma = 120°$ en $\beta = 45°$

d $a = 6$, $b = 10$ en $c = 8$

e $a = b = 15$ en $\gamma = 20°$

Opgave 11

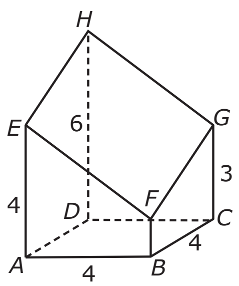
Teken het trapezium $ABCD$ met $|AB| = 12$, $|AC| = 10$, $|DC| = 4$ en $\angle B = 45°$. Omdat de vierhoek $ABCD$ een trapezium is, is AB evenwijdig met CD.
Bereken de lengte van AD. Er zijn twee mogelijkheden. Geef ze allebei.

Opgave 12

Laat met een berekening zien dat een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B, \angle C = 20°$, $|AC| = 10$ en $|AB| = 5$ onmogelijk is.

Opgave 13

Bekijk de afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen staan in de figuur. Bereken de grootte van $\angle EHG$ met behulp van de cosinusregel in ΔEHG.



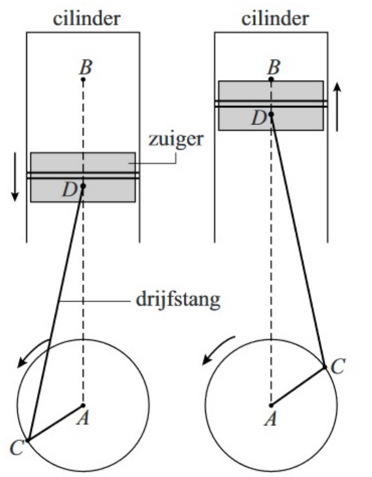
Figuur 10

Opgave 14

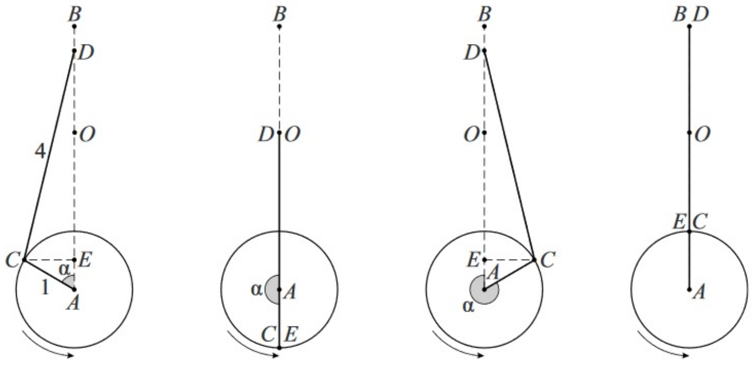
Van een viervlak $ABCD$ zijn de ribben achtereenvolgens $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 7$ cm, $|BD| = 8$ cm en $|CD| = 9$ cm. Punt P is het midden van AC en punt Q is het midden van BD. Bereken de lengte van PQ.

Toepassen

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In de eerste figuur zijn twee standen getekend.
In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.
In de tweede figuur zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 dm heeft.
De grootte van hoek CAD (in graden) is α.
De grootte van hoek ACD (in graden) is γ.
Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.



Figuur 11



Figuur 12

Je kunt nu de lengte van AD bij allerlei hoeken α of γ berekenen.

Opgave 15

Bekijk de figuren hierboven. Alle afmetingen zijn in dm.

a Bereken AD als $\gamma = 110°$ in mm nauwkeurig.

b Bereken AD als $\alpha = 55°$ in mm nauwkeurig.

Opgave 16

De zuiger kent een stand waarbij AD maximaal is en een stand waarbij AD minimaal is.

a Tussen welke waarden ligt de lengte van AD?

b Hoe groot zijn AD en γ als $\alpha = 100°$?

Testen

Opgave 17

Van een driehoek ABC is gegeven $|AC| = b = 12$, $|AB| = c = 15$ en $\angle A = \alpha = 55°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Van een driehoek zijn de zijden respectievelijk 8, 5 en 4 cm. Bereken de grootte van de hoeken.

Email: f.spijkers@math4all.nl