2.3 De sinusregel

Inleiding

Niet altijd zijn driehoeken netjes voorzien van een rechte hoek. Om toch met sin, cos of tan te kunnen werken heb je dan hulplijnen nodig die voor rechte hoeken zorgen. Bovendien moet je dan een aantal berekeningsstappen zetten. De sinusregel maakt het rekenwerk wat eenvoudiger...

Je leert in dit onderwerp

- de sinusregel gebruiken.

Voorkennis

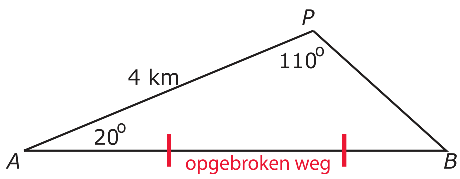
- werken sinus, cosinus en tangens;
- werken met hoeken groter dan 90°.

Verkennen

Opgave V1

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°. De weg van A naar P is 4 km.

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?

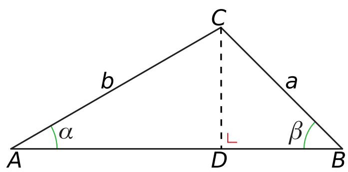


Figuur 1

Opgave V2

Bekijk de driehoek.

Laat zien, dat $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.



Figuur 2

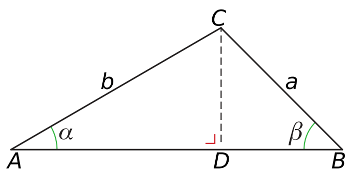
Uitleg

Je kunt een verband afleiden tussen a, b, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\beta)$ door de hoogtelijn CD op twee manieren te schrijven:

- In ΔADC is $|CD| = b \sin(\alpha)$.
- In ΔDBC is $|CD| = a \sin(\beta)$.

Dit betekent: $b \sin(\alpha) = a \sin(\beta)$. Dit kun je schrijven als:

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$. Met behulp van een andere hoogtelijn kun je ook zo'n verband tussen a, c, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\gamma)$ afleiden. Hierin is $c = |AB|$ en $\gamma = \angle C$.



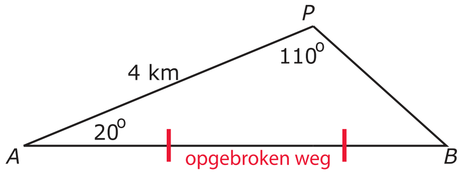
Figuur 3

Dit verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek heet de 'sinusregel'.

Opgave 1

Gebruik de sinusregel om het volgende (reeds bekende) probleem op te lossen.

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°. De weg van A naar P is 4 km.



Figuur 4

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?

Opgave 2

Gegeven is ΔABC met $|AB| = 5$ cm, $\angle A = 40°$ en $\angle C = 65°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is ΔDEF met $|DE| = 5$ cm, $\angle D = 40°$ en $\angle E = 65°$. Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

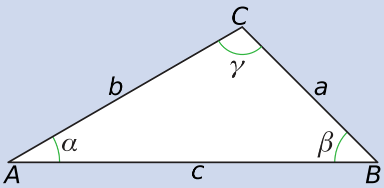
De algemene afspraak voor het geven van namen aan onderdelen van driehoek ABC is:

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$.

Nu kun je zelf afleiden: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 5

In elke ΔABC geldt de **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

Voorbeeld 1

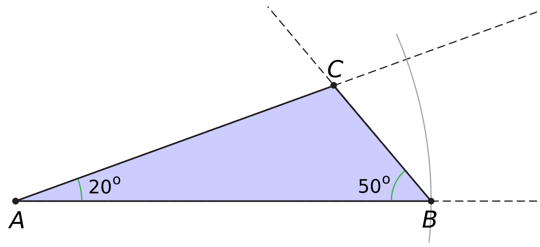
Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $|AB| = 6$. Bereken de lengte van AC.

Antwoord

Merk eerst op dat $\angle C = 110°$.

$\frac{|AC|}{\sin(50°)} = \frac{6}{\sin(110°)}$

Hieruit volgt: $|AC| \approx 4{,}89$.



Figuur 6

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van ΔABC als gegeven is $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $|AB| = 6$ cm.

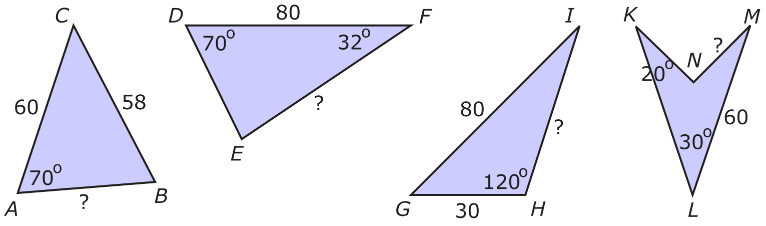
a Construeer zelf deze driehoek.

b Waarom is het voor het berekenen van de lengte van AC nodig om $\angle C$ te berekenen?

c Controleer dat inderdaad $|AC| \approx 4{,}89$.

Opgave 6

Bereken de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 7

Opgave 7

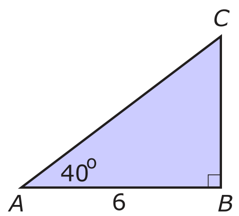
Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven. Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.
Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 8

In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van AC berekenen met behulp van de sinusregel.

a Laat zien hoe dat gaat.

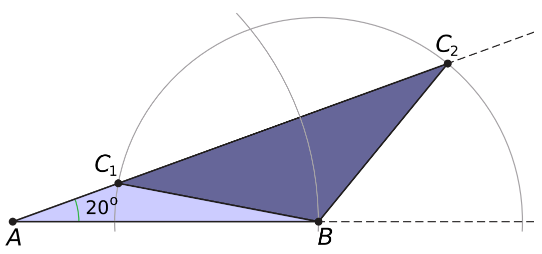
b Bereken $|AC|$ ook zonder de sinusregel te gebruiken.



Figuur 8

Voorbeeld 2

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $|AB| = 6$ en $|BC| = 4$. Bereken de lengte van AC.



Figuur 9

Antwoord

De sinusregel geeft: $\frac{4}{\sin(20°)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Hieruit volgt: $\sin(\angle C) \approx 0{,}5130$.
Nu zijn er twee hoeken die hieraan voldoen: $\angle C_2 \approx 31° \vee \angle C_1 \approx 149°$.
En daarom zijn er twee driehoeken mogelijk, wat de constructie ook laat zien. Van deze driehoeken is $\angle B_2 \approx 129° \vee \angle B_1 \approx 11°$.
Pas je nog een keer de sinusregel toe, dan vind je: $|AC| \approx 9{,}1 \vee |AC| \approx 2{,}2$.

Opgave 9

ΔKLM heeft $\angle K = 30°$, $|KL| = 5$ cm en $|LM| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken voor allebei de lengte van KM.

Opgave 10

Van een ΔABC is $|AB| = 20$, $|BC| = 25$ en $\angle A = 60°$.

a Toon aan dat $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$.

b Welke hoeken voldoen aan $\sin(\angle C) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$?

c Je berekent hoeken uit een driehoek. Welke hoek voldoet?

d Bereken nu de lengte van AC.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is ΔABC met $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$ en $|AB| = 5$.
Bereken $|AC|$ en $|BC|$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

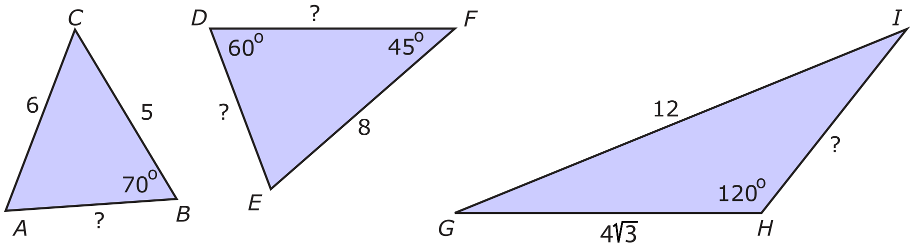
Gegeven is ΔKLM met $\angle K = 40°$, $|KM| = 6$ en $|LM| = 8$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

Laat met een berekening zien dat een driehoek ABC met $|AB| = 12$, $|AC| = 8$ en $\angle B = 45°$ onmogelijk is.

Opgave 14

Bereken (waar mogelijk exact) de zijde waar het vraagteken bij staat.



Figuur 10

Opgave 15

Je wilt de lengte bepalen van lijnstuk AB, maar tussen de punten A en B ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Je loopt vanuit punt A 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met AB. Zo houd je droge voeten.
- Je bent op een punt dat je P noemt en meet de hoek tussen AP en PB. Die is 80°.
- Vervolgens bereken je de lengte van AB.

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van AB.

Toepassen

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen, werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette ‘voorwaartse insnijding’. Deze methode werkt alleen in de ‘lagere geodesie’, de **landmeetkunde** waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Opgave 16

Stel dat A en B de bekende punten zijn. Ze liggen 125,3 m uit elkaar. Je wilt de positie van P bepalen. Je meet de hoeken BAP en ABP: $\angle BAP = 68{,}3°$ en $\angle ABP = 77{,}4°$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP.

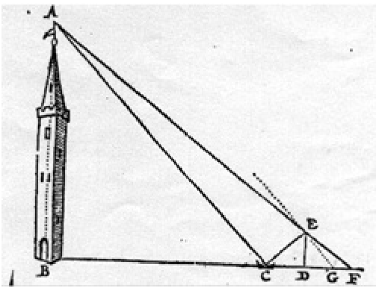
Opgave 17

Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren (punt A). Deze hoek C is 32°. Dan loopt hij 50 m verder van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de nieuwe hoek D is nu 15°.

a Maak een schets van deze situatie met de gegevens die bekend zijn. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op 1,80 m boven de grond zijn gemeten.

b Bereken de hoogte van de toren in meter nauwkeurig. (Opmerking: er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is wel een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)

De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578—1647) bedacht een manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is AB en er ligt een spiegel op de grond in C. Je zet bij D een verticale stok DE zo, dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E. Vervolgens bepaal je de plaats van punt F zo, dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Als je de lengtes van CD, DE en DF kent, kun je de hoogte van de toren AB berekenen.



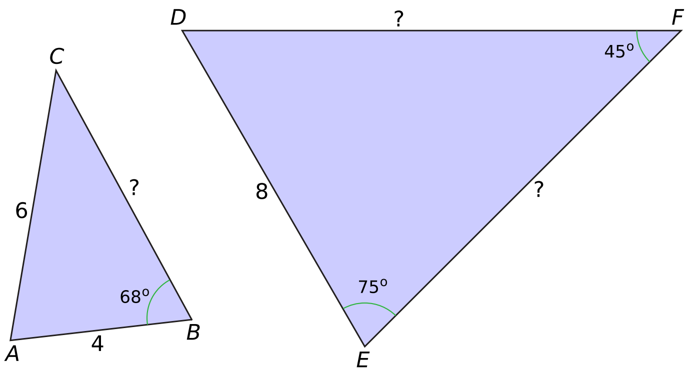
Figuur 11

c Bereken de hoogte van de toren als $|CD| = 8$, $|DE| = 6$ en $|DF| = 9$.

Testen

Opgave 18

Bereken (exact indien mogelijk) in de twee onderstaande figuren de lengte van het lijnstuk waar een vraagteken bij staat.



Figuur 12

Opgave 19

Gegeven is ΔABC met $\angle B = 45°$, $|BC| = 5$ cm en $|AC| = 4$ cm. Construeer de twee mogelijke driehoeken en bereken telkens de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.