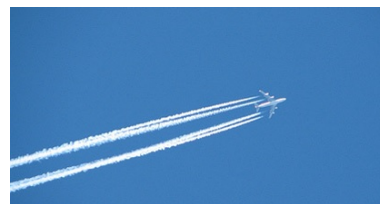


2.2 Sinus, cosinus en tangens

Inleiding

Een vliegtuig legt 500 km af met een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Hoeveel km verplaatst het vliegtuig zich in noordelijke richting? Dit kun je nauwkeurig berekenen met behulp van goniometrie. Er is immers sprake van een rechthoekige driehoek. Maar wat als de windrichting bijvoorbeeld 120° is?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken bij vectoren;
- sinus, cosinus en tangens van hoeken boven de 90° gebruiken.

Voorkennis

- werken met goniometrische verhoudingen in rechthoekige driehoeken;
- vectoren met gegeven richting en lengte tekenen en de componenten bepalen door meting;
- van vectoren gegeven door hun x - en y -componenten de lengte en de richtingshoek berekenen.

Verkennen

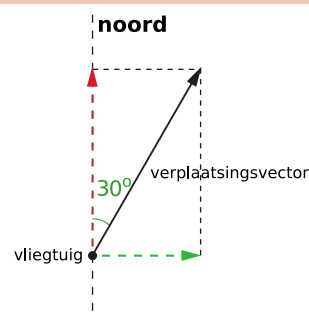
Opgave V1

Bekijk de applet.

Je ziet een vliegtuig met een gegeven verplaatsingsvector. Kun je nauwkeurig vaststellen hoeveel het in noordelijke dan wel oostelijke richting is verplaatst? M.a.w. kun je de noordelijke component en de oostelijke component berekenen?

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.

- Bereken de noordelijke component en de oostelijke component beiden met behulp van zowel de sinus en cosinus.
- Bereken ook de noordelijke component bij een richtingshoek van 120° . Waarom is hij negatief?



Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet.

Je hebt al leren werken met sinus, cosinus en tangens, maar meestal bij scherpe hoeken. Het werken met vectoren maakt het mogelijk om de definities van sinus, cosinus en tangens uit te breiden voor grotere hoeken.

Bekijk de vector met een lengte van 1 in een eenheidscirkel (cirkel met middelpunt O en straal 1). Zolang de richtingshoek α scherp (tussen 0° en 90°) is, kun je de componenten van deze vector berekenen met goniometrie:

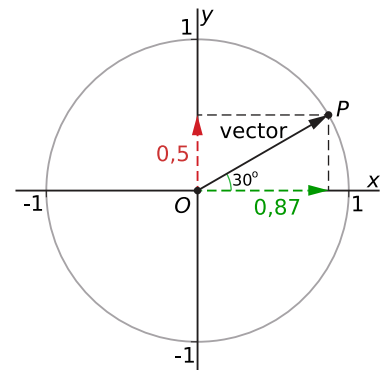
$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{1} \text{ dus } v_x = \cos(\alpha)$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{v_x}{1} \text{ dus } v_x = \cos(30^\circ) \approx 0,87$$

$$\sin(\alpha) = \frac{v_y}{1} \text{ dus } v_y = \sin(\alpha)$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{v_y}{1} \text{ dus } v_y = \sin(30^\circ) = 0,5$$

Door af te spreken dat $v_x = \cos(\alpha)$ en $v_y = \sin(\alpha)$ ook voor alle andere hoeken geldt, geef je de sinus en de cosinus voor alle mogelijke hoeken betekenis. Bekijk in de figuur dat dan voor hoeken tussen 90° en 270° de cosinus negatief is en ook dat voor hoeken tussen 180° en 360° de sinus negatief is.



Figuur 3

Opgave 1

Bereken met de rekenmachine in twee decimalen de componenten van een verplaatsingsvector met lengte 1 bij de richtingshoeken.

- 40°
- 140°
- 240°
- 340°
- De verplaatsingsvectoren uit a, b, c en d krijgen allemaal een lengte van 500. Wat betekent dit voor alle componenten?

Opgave 2

Beredeneer dat:

- $\sin(100^\circ) = \sin(80^\circ)$
- $\cos(100^\circ) = -\cos(80^\circ)$
- $\sin(253^\circ) = -\sin(73^\circ)$
- $\cos(280^\circ) = \cos(80^\circ)$

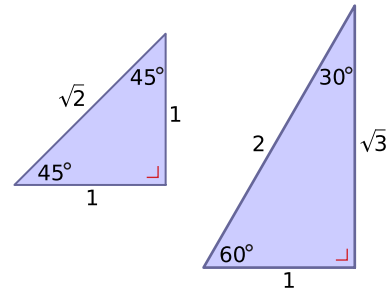
Opgave 3

Beredeneer dat:

- $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$
- $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$
- $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$
- $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Opgave 4

Van een aantal hoeken kun je de sinus, de cosinus en de tangens exact berekenen. Omdat die hoeken regelmatig voorkomen, is het handig om die exacte waarden te weten. Bekijk de twee bijzondere driehoeken. De rechter is een halve gelijkzijdige driehoek en de linker is een geodriehoek.



Figuur 4

- a Bereken sinus, cosinus en tangens van 60° en van 30° .
- b Bereken sinus, cosinus en tangens van 45° .
- c De tabel met de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° is heel handig om uit je hoofd te kennen. Maak deze tabel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

In de **eenheidscirkel** (de cirkel met middelpunt O met straal 1) zie je een vector met aangrijpingspunt O en met een lengte van 1 in een assenstelsel. De componenten van zo'n vector zijn:

$$v_x = \cos(\alpha)$$

$$v_y = \sin(\alpha)$$

Dit geldt voor alle mogelijke hoeken α .

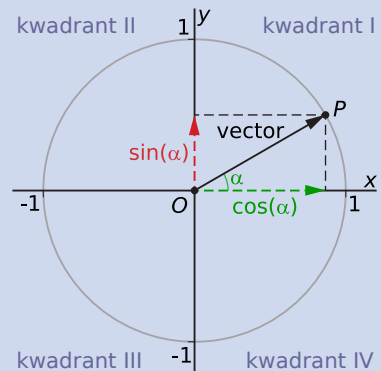
Het assenstelsel verdeelt het vlak in vier **kwadranten**. Voor hoeken in het tweede kwadrant is de cosinus negatief en de sinus positief. Voor hoeken in het derde kwadrant zijn de cosinus en de sinus beide negatief. Voor hoeken in het vierde kwadrant is de cosinus positief en de sinus negatief.

$$\text{Er geldt: } \tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}.$$

Is de lengte van de vector niet 1 maar bijvoorbeeld r , dan worden beide componenten ook r keer zo groot. De **componenten van een vector** met lengte r en **richtingshoek** α zijn:

$$v_x = r \cos(\alpha)$$

$$v_y = r \sin(\alpha)$$



Figuur 5

Exacte waarden sinus, cosinus en tangens					
hoek	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabel 1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Bereken exact de sinus, cosinus en tangens van hoeken van 60° en 120° .

Antwoord

De vector heeft lengte 1 en richtingshoek α .

Als $\alpha = 60^\circ$ is $\triangle OPQ$ precies een halve gelijkzijdige driehoek.

Voor de x-component geldt: $v_x = \frac{1}{2}$.

Voor de y-component geldt: $v_y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Daarom geldt:

$$\cos(60^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

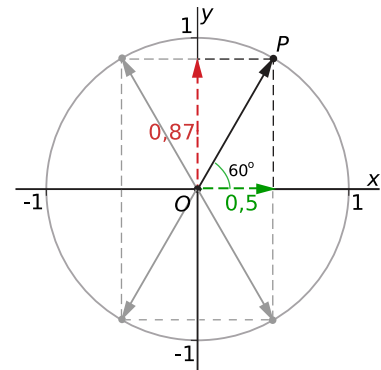
$$\tan(60^\circ) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Vervolgens is:

$$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(120^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$



Figuur 6

Opgave 5

Bepaal met behulp van de eenheidscirkel de exacte waarden van sin, cos en tan van 240° en 300° .

Opgave 6

Bepaal bij de gegeven richtingshoek telkens exact de sinus, cosinus en tangens.

- a $\alpha = 135^\circ$
- b $\alpha = 225^\circ$
- c $\alpha = 315^\circ$

Opgave 7

Bepaal bij de gegeven richtingshoek telkens exact de sinus, cosinus en tangens.

- a $\alpha = 150^\circ$
- b $\alpha = 210^\circ$
- c $\alpha = 330^\circ$

Opgave 8

Gebruik indien mogelijk de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° .

- a Bepaal alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.
- b Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\sin(\beta) = -0,6$.
- c Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken tussen 0° en 360° die voldoen aan $\tan(\gamma) = -0,6$.

Voorbeeld 2

Een schip vaart 40 kilometer met een koers van 115° ten opzichte van het noorden. Dergelijke kompaskoersen worden altijd met de klok mee gemeten. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst?

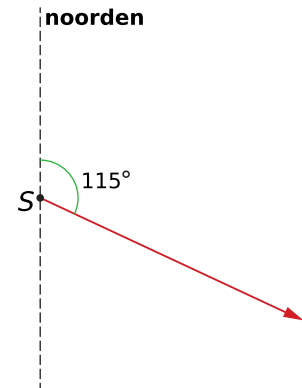
Antwoord

Projecteer de koers van het schip op een eenheidscirkel.

Gebruik de sinus: $v_y = \sin(\alpha)$ om de afstand in noordelijk of zuidelijke richting te bepalen.

Bereken dat $40 \sin(335^\circ) \approx -16,9$ km.

Het schip heeft zich 16,9 km in zuidelijke richting verplaatst.



Figuur 7

Opgave 9

Een schip vaart 80 kilometer met een koers van 215° ten opzichte van het noorden. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? En hoeveel in oostelijke of westelijke richting? Geef je antwoorden in één decimaal.

Voorbeeld 3

Bekijk $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $AC = 4$ cm.

Bereken de exacte lengte van AB .

Antwoord

Zonder rechte hoeken kun je niet met sin, cos en/of tan werken.

Maak eerst rechte hoeken.

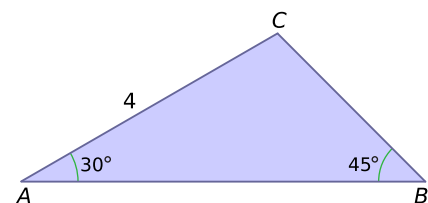
Vat AC als vector op, zodat AD en DC de componenten zijn:

$$|AD| = 4 \cos(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

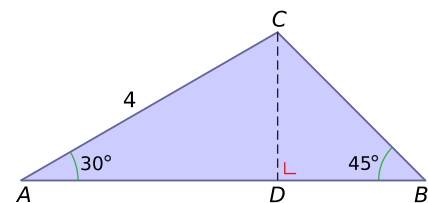
$$|CD| = 4 \sin(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$\triangle DBC$ is een gelijkbenige driehoek: $|DB| = |CD| = 2$.

Hieruit volgt het antwoord: $|AB| = 2\sqrt{3} + 2$.



Figuur 8



Figuur 9

Opgave 10

Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 50^\circ$, $\angle Q = 35^\circ$ en $|PR| = 6$ cm.

Bereken de lengte van PQ en QR . Geef benaderingen in twee decimalen.

Opgave 11

Gegeven is $\triangle KLM$ met $\angle K = 60^\circ$, $\angle L = 45^\circ$ en $|LM| = 4$ cm.

Bereken de exacte lengte van KL en KM .

Verwerken

Opgave 12

Bereken de x - en de y -componenten van de volgende vectoren. Geef waar mogelijk exacte uitkomsten.

- a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135^\circ$
- b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210^\circ$
- c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 320^\circ$
- d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 13

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

- a $\cos(\alpha) = 0,38$
- b $\sin(\alpha) = 0,38$
- c $\cos(\alpha) = -0,38$
- d $\sin(\alpha) = -0,38$
- e Teken een eenheidscirkel om het verband te vinden tussen $\cos(\alpha)$ en $\cos(-\alpha)$. Doe hetzelfde voor $\cos(\alpha)$ en $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Opgave 14

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

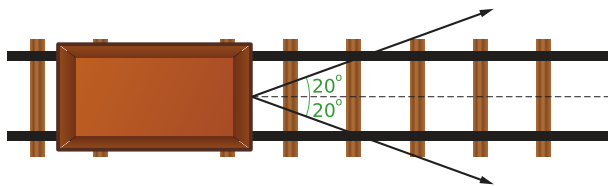
- a $\cos(\alpha) = 0$
- b $\cos(\alpha) = 1$

Opgave 15

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $|AC| = 5$ cm. Bereken de exacte lengte van AB en BC .

Opgave 16

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is 40° . De grootte van elke kracht is 7 N.



Figuur 10

- a Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.
- b Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van 20° ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van 15° ten opzichte van de rails.
- c In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 17

Bekijk deze foto van een huis met een zogenaamd mansardedak.

De breedte van het huis is 6 meter en de breedte van elk dakdeel is 2,5 meter. De onderste dakdelen maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak.

- Bereken de hoogte van het huis als de dakgoot op 3 meter boven de begane grond zit.
- Bereken de hellingshoek van de bovenste dakdelen.



Figuur 11

Toepassen**Opgave 18: Noodlanding**

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h in de koers 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

Opmerking: Dit is dezelfde opgave als in 'Toepassen' van het vorige onderdeel, maar het verschil is dat je hiervoor nog mocht meten en nu moet je berekenen.

Testen**Opgave 19**

Bereken (exact indien mogelijk, anders in graden nauwkeurig) alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

- $\sin(\alpha) = -0,83$
- $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 20

Gegeven zijn de punten $P(0,8)$ en $Q(12,3)$.

- Bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ en de hoek die \overrightarrow{PQ} met de positieve x -as maakt.
- \overrightarrow{OR} is even lang als \overrightarrow{PQ} maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x -as. Bereken de exacte coördinaten van R .


Opgave 21

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, en $|AC| = 10$. Bereken de exacte lengte van AB en BC .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
