

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het hoofdstuk **Analytische meetkunde** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit hoofdstuk horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch coördinatenstelsel — midden van een lijnstuk — lengte van een lijnstuk
- vergelijking van een (rechte) lijn
- vergelijking van een cirkel met gegeven middelpunt en straal
- snijpunten — stelsel vergelijkingen — strijdig stelsel — raaklijn aan cirkel
- loodrechte stand van twee lijnen — raaklijn loodrecht straal — (omgekeerde) stelling van Thales

Activiteitenlijst

- een cartesisch assenstelsel invoeren — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen
- vergelijkingen van rechte lijnen opstellen
- vergelijkingen van cirkels opstellen — uit de vergelijking van een cirkel middelpunt en straal afleiden, ook door kwadraat afsplitsen
- snijpunten berekenen, vooral van lijnen en lijnen en cirkels — onderzoeken of gegeven lijnen raken aan een gegeven cirkel
- onderzoeken of twee lijnen loodrecht op elkaar staan — de vergelijking van een lijn loodrecht op een gegeven lijn opstellen — de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel in een punt op die cirkel opstellen — bewijzen met behulp van analytische meetkunde

Achtergronden

René Descartes (1596–1650) maakte in 1618 kennis met de Nederlandse wiskundige Isaac Beeckman, die hem de wiskundige inzichten van die dagen, onder andere met het werk van François Viète en het gebruik van letters voor variabelen, leerde.

Uiteindelijk schreef Descartes 'Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences', met als aanhangsel 'La Géométrie'. Het werd in 1637 in Leiden gepubliceerd. Hierin nam Descartes afstand van de logica (van Aristoteles) die bijna 2000 jaar lang het wetenschappelijk denken had beheerst. Hij twijfelde aan alle bestaande kennis en vond dat alle wetenschap op wiskundige methoden moest worden gebaseerd. Zijn wereldbeeld was dat van een groot mechanisme bestaande uit allemaal delen die via wiskundige wetten op elkaar reageerden.

Op het gebied van de wiskunde zelf zette hij een revolutionaire ontwikkeling in door het rechthoekig (cartesisch) assenstelsel in te voeren. In één klap konden meetkundige objecten worden beschreven met getallen en vergelijkingen. Dit leidde tot het ontstaan van de analytische meetkunde...



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijn $l : 5x - 4y = 40$ en de punten $A(12,3)$ en $B(2, -2)$.

- Lijn m gaat door de punten A en B . Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .
- Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB loodrecht op lijn m .
- Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt C van p en lijn l .

Opgave 2

Stel in de volgende gevallen een vergelijking op van de beschreven lijn of cirkel.

- a Lijn l door de punten $A(-22,105)$ en $B(58,65)$.
- b Lijn m door $C(24,0)$ en loodrecht op l .
- c Cirkel c_1 door C met middelpunt $M(20,3)$.
- d Lijn n door de snijpunten van de cirkels $c_1 : (x - 20)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en $c_2 : (x - 24)^2 + y^2 = 2$.

Opgave 3

In een cartesisch $Ox y$ -assenstelsel zijn er twee cirkels met straal $\sqrt{13}$ die door de punten O en $A(0,6)$ gaan. Stel de vergelijkingen van deze cirkels op.

Opgave 4

In een cartesisch assenstelsel is de cirkel c gegeven door $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 8$. Punt $A(4,0)$ is een punt van cirkel c .

- a Toon dit aan.
- b Stel een vergelijking op van raaklijn l in A aan cirkel c .
Er is een lijn m en een lijn n die loodrecht staan op l en ook cirkel c raken.
- c Stel een vergelijking op van m en n .

Opgave 5

Gegeven is de lijn $l : 4x - 15y = 61$ en punt $P(0,12)$.

- a Stel een vergelijking op van lijn m door P en loodrecht op l .
- b Bereken het snijpunt S van l en m .
- c Bereken de afstand van P tot lijn l .
- d Stel een vergelijking op van cirkel c met middelpunt P en door S .
- e Waarom hebben cirkel c en lijn l precies één snijpunt?

Opgave 6

Een cirkel waarvan het middelpunt ligt op de lijn $l : y = x$ raakt de lijn $m : y = 2x + 5$ in het punt $P(2,9)$.

Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Toepassen**Opgave 7: Scheve rechthoek**

In een assenstelsel snijdt lijn l de x -as in $A(a,0)$ en de y -as in $B(0,b)$. a en b zijn positief.

- a Laat zien dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ een vergelijking van l is.

Punt O wordt gespiegeld in lijn l . Het spiegelbeeld van O is punt P . De oppervlakte van vierhoek $OAPB$ is gelijk aan ab . De oppervlakte van de rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van vierhoek $OAPB$ is $2ab$.

- b Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Opgave 8: Middelloodlijn

Een middelloodlijn van een lijnstuk AB is een lijn die door het midden van AB gaat en er loodrecht op staat. Een manier om zo'n middelloodlijn te construeren is door twee even grote cirkels om A en om B te tekenen en een lijn te trekken door beide snijpunten van die cirkels. Met analytische meetkunde kun je bewijzen dat je zo inderdaad een middelloodlijn krijgt.

- Kies een geschikt assenstelsel. Welke coördinaten geef je A en B ?
- Stel vergelijkingen op van twee even grote cirkels om A en om B .
- Hoe maak je nu het bewijs af?

Opgave 9: Cirkel door drie punten

Hoe kun je het resultaat van de vorige opgave gebruiken om de vergelijking op te stellen van een cirkel door drie gegeven punten? Beschrijf de rekenprocedure die je dan moet volgen. Stel een vergelijking op van de cirkel door $(4,0)$, $(6,4)$ en $(0,4)$.

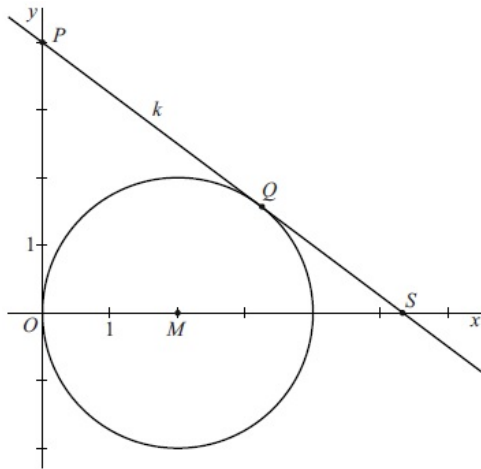
Opgave 10: Afstand punt tot lijn

Toon aan dat de afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l : ax + by = c$ gelijk is aan $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Examen

Opgave 11: Lijn en cirkel

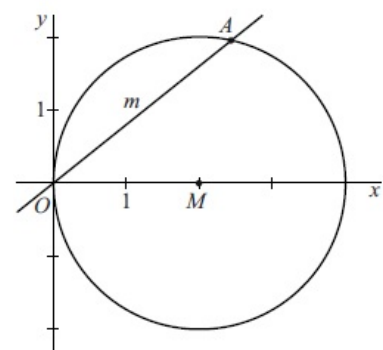
Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2,0)$ en straal 2. De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0,4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x -as in het punt S . Zie de figuur.



Figuur 2

- Bereken exact de x -coördinaat van S .
De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p = \dots$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A zo, dat $|OA| = 3$. Zie de figuur.
- Bereken exact de waarde van p .

(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2012, eerste tijdvak)




Figuur 3



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
