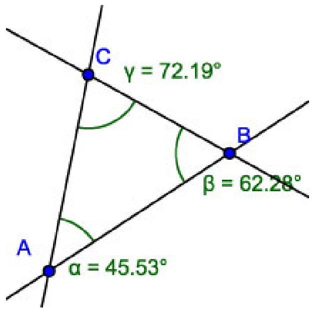
1.5 Loodrechte stand

Inleiding

Bij het ontwerpen van een gebouw, brug of viaduct spelen hoeken, afstanden, lengtes, enzovoort een grote rol. Bij ontwerpen wordt gebruik gemaakt van technische teken- en berekensoftware. Voorbeelden daarvan zijn AutoCAD en Illustrator. Bedenk dat computers alles (dus ook tekst, muziek en tekeningen) verwerken in getallen. Dan begrijp je waarom coördinaten zo belangrijk zijn voor het tekenen op computers.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- bepalen wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan;
- de vergelijking opstellen van een lijn loodrecht op een gegeven lijn en door een gegeven punt;
- de vergelijking opstellen van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven punt op die cirkel;
- bewijzen leveren met behulp van analytische meetkunde.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- het hellingsgetal berekenen van een lijn door twee punten;
- snijpunten van rechte en/of kromme lijnen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de lijn met vergelijking $2x + 4y = 9$.

a Hoe luidt de vergelijking van een lijn door $O(0,0)$ die er loodrecht op staat?

b Ontdek je een verband tussen beide vergelijkingen?

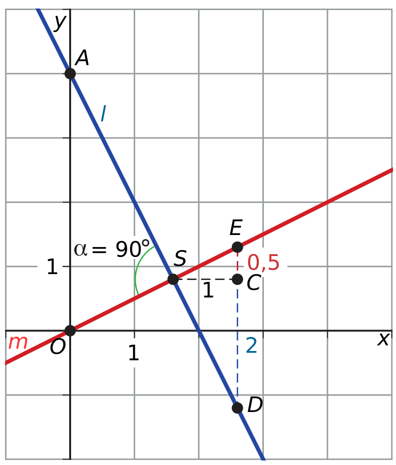
Uitleg 1

Bekijk de applet.

Bekijk de lijnen $l_p : y = px + 4$ en $m : y = 0{,}5x$. Ga na dat beide lijnen loodrecht op elkaar staan als $p = -2$.

De twee rechthoekige driehoeken DCS en SCE zijn dan gelijkvormig. Immers $\angle DSC$ en $\angle CSE$ zijn samen 90°. Maar $\angle CSE$ en $\angle SEC$ zijn ook samen 90°, dus $\angle SEC = \angle DSC$. Beide driehoeken hebben dezelfde hoeken en zijn daarom gelijkvormig. Hun zijden hebben dezelfde verhoudingen en dus is $\frac{|EC|}{1} = \frac{1}{|DC|}$. Omdat $|EC| = 0{,}5$ vind je $|DC| = 2$.

Uit de figuur blijkt dat een lijn die loodrecht staat op een lijn met een richtingscoëfficiënt van 0,5 zelf een richtingscoëfficiënt van -2 moet hebben. Het product van deze twee hellingsgetallen is -1 en dat blijkt altijd het geval te zijn bij lijnen die elkaar loodrecht snijden (tenzij een van beide verticaal is).



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** wat er met de richtingscoëfficiënten van twee loodrechte lijnen aan de hand is.

Toon aan dat de lijnen $p: y = 0{,}25x$ en $q: y = -4x + 3$ loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2

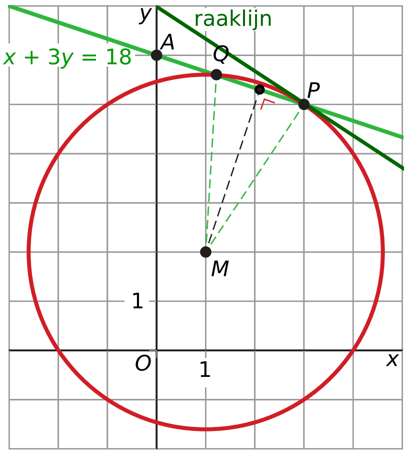
Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn die loodrecht staat op $k: 2x - 5y = 10$?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet lijn l door A en $P(3,5)$. Punt P ligt op de cirkel $c: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.
Als je punt A verplaatst, kun je ervoor zorgen dat l de cirkel $c: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ raakt in P. De punten P en Q vallen dan samen.

Zolang P en Q verschillen, zie je een gelijkbenige driehoek MPQ met een hoogtelijn. Die hoogtelijn staat loodrecht op PQ. Zodra P en Q samenvallen, vallen de zijden MP, MQ en deze hoogtelijn samen. De lijn l is dan een raaklijn aan de cirkel. Je ziet dat zo'n raaklijn loodrecht moet staan op de straal MP (want die valt dan samen met de hoogtelijn van ΔMPQ).



Figuur 3

En daarmee kun je de vergelijking van die raaklijn opstellen: hij staat loodrecht op lijn MP en gaat door $P(3,5)$. Omdat de richtingscoëfficiënt van MP gelijk is aan 1,5, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $-\frac{2}{3}$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -\frac{2}{3}x + 7$.

Opgave 3

De raaklijn in een punt P op een gegeven cirkel c staat loodrecht op de straal naar het raakpunt P.

a Geldt dit voor elke raaklijn aan cirkel c in een punt P op cirkel c?

b Laat zien dat $P(3,5)$ op cirkel $c: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ ligt.

c Stel de vergelijking van de raaklijn in $P(3,5)$ aan cirkel c op.

Opgave 4

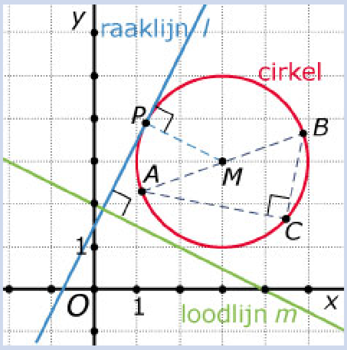
Stel een vergelijking op van de raaklijn door punt $A(0,0)$ aan de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rechte hoeken spelen vaak een rol in de wiskunde. In de figuur zie je enkele toepassingen.

- Als voor twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m geldt dat $r_l \cdot r_m = -1$, dan staan beide lijnen loodrecht op elkaar. Staan omgekeerd twee lijnen l en m met richtingscoëfficiënten r_l en r_m loodrecht op elkaar, dan geldt $r_l \cdot r_m = -1$. Je zegt dan wel dat l een **loodlijn** is van m en omgekeerd dat m een loodlijn is van l.
- De **raaklijn** aan cirkel c in een punt P dat ligt op cirkel c, staat loodrecht op de straal MP. Hierin is M het middelpunt van die cirkel. De afstand van M tot de raaklijn is gelijk aan de afstand tussen M en P.
- Als C een punt op een cirkel is en AB is een middellijn van die cirkel, dan heeft ΔABC een rechte hoek bij C. Dat heet de **stelling van Thales**. Ook het omgekeerde van deze stelling is waar.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
Stel de vergelijking op van de lijn door A en loodrecht op l.

Antwoord

Teken eerst de situatie met l loodrecht op m.

Ga na dat lijn l een richtingscoëfficiënt heeft van $-\frac{2}{3}$.

Als een lijn die daar loodrecht op staat een richtingscoëfficiënt heeft van r, dan moet $-\frac{2}{3} \cdot r = -1$. De lijn door A en loodrecht op l heeft dus een richtingscoëfficiënt van 1,5.

En daarom een vergelijking van de vorm $y = \frac{3}{2}x + b$.

De lijn moet door $A(3,4)$ en dus moet $4 = \frac{3}{2} \cdot 3 + b$. Dus $b = -\frac{1}{2}$. De vergelijking wordt $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
Ga na dat dit in overeenstemming is met de figuur.

Opgave 5

Gegeven is de lijn $p: 3x - 4y = 12$. Stel een vergelijking op van de lijn q door $O(0,0)$ en loodrecht op p.

Opgave 6

Toon aan dat lijn l door $O(0,0)$ en $P(2,5)$ loodrecht staat op lijn m door P en $Q(7,3)$.

Opgave 7

Gegeven zijn de punten $A(-2,5)$, $B(8,0)$ en $C(-2,1)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door C die loodrecht staat op lijn AB.

Zoals je weet, is de middelloodlijn van een lijnstuk een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat.

b Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ en punt $P(5,1)$. Stel de vergelijking op van de raaklijn in P aan de cirkel c.

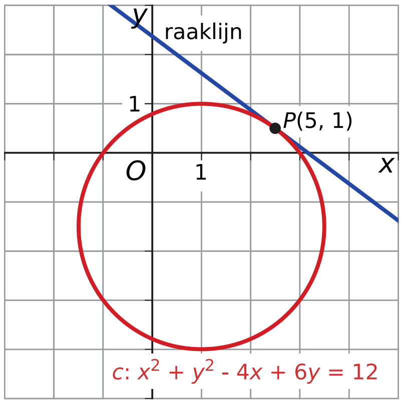
Antwoord

Als je zelf de situatie wilt tekenen, moet je eerst het middelpunt en de straal van c berekenen.
Daartoe herleid je de vergelijking van c tot
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. Je ziet dan dat het middelpunt $M(2,-3)$ en de straal 5 is. Het punt $P(5,1)$ lijkt op de cirkel te liggen. Ga dit na door te kijken of de coördinaten van dit punt aan de cirkelvergelijking voldoen.

De raaklijn in P aan de cirkel staat loodrecht op de lijn MP.

Ga na dat lijn MP een richtingscoëfficiënt heeft van $\frac{4}{3}$. Voor de richtingscoëfficiënt r van de raaklijn geldt daarom $\frac{4}{3} \cdot r = -1$.

De raaklijn heeft dus een richtingscoëfficiënt van $-\frac{3}{4}$. En daarom een vergelijking van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.



Figuur 5

De raaklijn gaat door $P(5,1)$ en dus wordt de vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$. Ga na dat dit in overeenstemming is met de figuur.

Opgave 8

Gegeven is de cirkel $c : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

a Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de gegeven cirkel c in het punt $Q(6,-6)$.

b Je kunt in de applet in **Voorbeeld 2** zowel de cirkel als het punt op de cirkel verplaatsen. Oefen het opstellen van een raaklijn aan cirkel c in een punt op die cirkel.

Opgave 9

Gegeven zijn de drie punten $A(0,2)$, $B(4,4)$ en $C(6,0)$.

a Leg uit waarom het middelpunt M van de cirkel c door deze drie punten het snijpunt is van de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en BC.

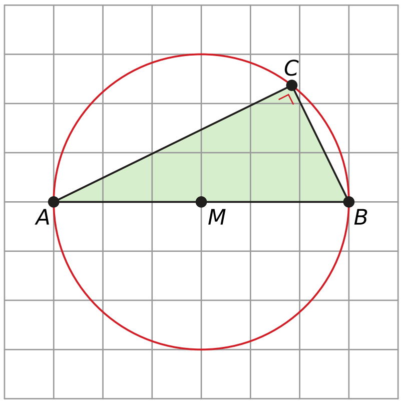
b Stel een vergelijking op van c.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in punt A.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: stelling van Thales

De stelling van Thales luidt: ‘Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht.’ Je kunt deze stelling met behulp van analytische meetkunde bewijzen. Ook kun je het omgekeerde van deze stelling bewijzen.



Figuur 6

Opgave 10

Als je in een cirkel twee lijnen trekt die allebei door het middelpunt M gaan, dan vormen de vier snijpunten van die lijnen met de cirkel een rechthoek. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

a Kies een assenstelsel waarvan $M = O(0,0)$ het middelpunt van de cirkel is en het punt $B(1,0)$ een punt op de cirkel. Welke vergelijking heeft de cirkel dan?

b De ene lijn door het middelpunt van de cirkel is bijvoorbeeld de x-as, de andere is dan $y = ax$. Welke vier snijpunten met de cirkel vind je?

c Waarom vormen deze vier punten een rechthoek?

d Waarom heb je nu de stelling van Thales bewezen?

e Kun je ook een bewijs geven zonder analytische meetkunde?

Opgave 11

Ook het omgekeerde van de stelling van Thales is waar.

a Hoe luidt deze stelling?

Om dit te bewijzen kun je het beste werken met een cartesisch assenstelsel waarvan $O(0,0)$ samenvalt met punt C, punt A op de x-as en punt B op de y-as ligt.

b Wat moet je dan nog bewijzen?

c Maak nu zelf het bewijs af.

Verwerken

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $P(120,31)$ en $Q(124,37)$ en de lijn l met vergelijking $25x - 40y = 167$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door P die loodrecht staat op l.

De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van PS als S het snijpunt van lijn l en de loodlijn door P op l is.

b Bereken die afstand in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van PQ.

Opgave 13

Gegeven is driehoek ABC door de hoekpunten $A(0,2)$, $B(5,4)$ en $C(2,5)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn p door C loodrecht op AB.

b D is het snijpunt van lijn p met de lijn AB. Bereken de coördinaten van D.

c De lengte van de hoogtelijn CD is de hoogte van driehoek ABC als AB als basis wordt genomen. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met behulp van hoogte CD.

Opgave 14

Cirkel c heeft de vergelijking $x^2 + y^2 = 8x + 4y + 5$. Het punt $A(8,5)$ ligt op deze cirkel, het punt $B(-3,3)$ ligt buiten cirkel c.

a Laat door berekening zien dat A op de cirkel ligt en B erbuiten.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan cirkel c.

Door B gaan twee lijnen die cirkel c raken.

c Licht toe waarom deze lijnen vergelijkingen van de vorm $y = ax + 3 + 3a$ hebben.

d Stel de vergelijkingen van beide raaklijnen door B aan cirkel c op.

Opgave 15

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover een hoekpunt. In elke driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.
Kies daartoe een assenstelsel met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(b,c)$. Ga er voor het gemak vanuit dat a, b en c alle drie groter zijn dan 0.

a Welke vergelijking heeft de zwaartelijn door C?

b Welke vergelijking heeft de zwaartelijn door A?

c Welk snijpunt hebben beide zwaartelijnen?

d Hoe maak je het bewijs nu af?

Opgave 16

ΔOAB is gegeven door de hoekpunten $O(0,0)$, $A(5,0)$ en $B(2,6)$. In deze driehoek zijn OP en AQ twee hoogtelijnen.

a Leg uit waarom de punten O, A, P en Q op dezelfde cirkel liggen.

b Bereken de coördinaten van de punten P en Q.

c Stel een vergelijking op van de cirkel c door O, A, P en Q.

d Bereken het snijpunt van de raaklijnen in P en in Q aan cirkel c.

Toepassen

Opgave 17: Hoogtelijnenstelling

Bewijs met behulp van analytische meetkunde dat in elke driehoek de drie hoogtelijnen door één punt gaan.

Opgave 18: Omgeschreven cirkel

De ‘omgeschreven cirkel’ van een driehoek is de cirkel die door de drie hoekpunten van de driehoek gaat. Gegeven zijn de lijnen $l : y = \frac{3}{4}x + 2$, $m : y = -\frac{1}{2}x + 7$ en $n : y = 2x - 13$. Lijnen l en m snijden elkaar in punt A, m en n in B, en n en l in C. Geef de vergelijking van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Opgave 19: Middelloodlijnen in een driehoek

Een middelloodlijn in een driehoek is een lijn door het midden van en loodrecht op een zijde. In elke driehoek gaan de middelloodlijnen door één punt. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

Kies daartoe een assenstelsel met $A(-a,0)$, $B(a,0)$ en $C(b,c)$. Ga er voor het gemak van uit dat a, b en c alle drie groter zijn dan 0.

a Welke vergelijking heeft de middelloodlijn van AB?

b Welke vergelijking heeft de middelloodlijn van BC?

c Welk snijpunt hebben beide middelloodlijnen?

d Hoe maak je het bewijs nu af?

Testen

Opgave 20

Gegeven zijn het punt $P(12,44)$ en de lijn l met vergelijking $x-3y=60$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door P die loodrecht staat op l.

De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van PS als S het snijpunt van lijn l en de loodlijn door P op l is.

b Bereken die afstand in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 21

Ten opzichte van een cartesisch assenstelsel heeft cirkel c de vergelijking $x^2+y^2=6x+6y-13$. Het punt $A(4,1)$ ligt op deze cirkel.

a Laat door berekening zien, dat A op de cirkel ligt.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan cirkel c.

Door O gaan twee lijnen die de cirkel c raken.

c Stel de vergelijkingen van beide raaklijnen door O aan cirkel c op. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een lijn door twee punten en een lijn loodrecht daarop**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.