1.4 Snijden en raken

Inleiding

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 30 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt berekenen van twee lijnen;
- snijpunten berekenen van een lijn en een cirkel;
- snijpunten berekenen van twee cirkels;
- vast te stellen wanneer een lijn een cirkel raakt.

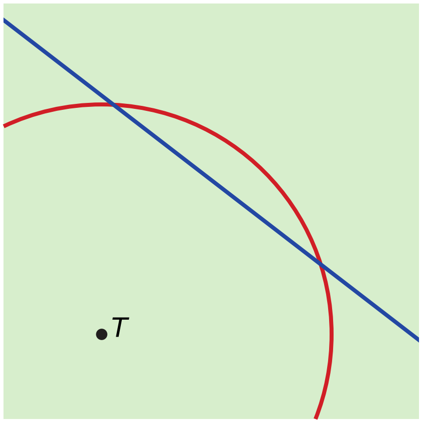
Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- systematisch lineaire en kwadratische vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 50 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.



Figuur 1

Kies het assenstelsel en de eenheden zo dat de cirkel als middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 cm heeft. Stel dat de lijn door $(0,5)$ en $(10,0)$ gaat.

a Welke vergelijkingen kun je voor de lijn en de cirkel dan opstellen?

b Bepaal de snijpunten van de lijn en de cirkel en bereken de afstand tussen beide punten.

c Hoeveel km op deze weg heb je bereik?

Uitleg 1

Stel je wilt het snijpunt van de lijnen $l : x + 2y = 8$ en $m : 3x - 4y = 12$ berekenen. Daarvoor bestaan meerdere methodes:

- Methode I: je kunt beide vergelijkingen herschrijven naar de vorm $y = ...$ Je kunt dan beide uitdrukkingen in x gelijkstellen en de vergelijking die ontstaat, oplossen.
- Methode II (substitutiemethode): je schrijft een van beide vergelijkingen in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Hier lukt dat gemakkelijk met $l : x = 8 - 2y$. Dit vul je in de andere vergelijking in: $3(8 - 2y) - 4y = 12$. En hieruit bepaal je de y-waarde van het snijpunt en vervolgens de x-waarde.
- Methode III (balansmethode): je kunt ook beide vergelijkingen optellen of aftrekken links en rechts van het isgelijkteken. Maar daar heb je alleen wat aan als of de x of de y als variabele wegvalt.

  $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

  Tel je nu beide vergelijkingen links en rechts van het isgelijkteken op, dan krijg je: $5x = 28$ en dus $x = 5{,}6$. De bijbehorende y-waarde vind je uit $5{,}6 + 2y = 6$.

Dit zijn drie methodes om een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Het is nuttig om alle drie de oplossingsmethoden om het snijpunt van lijnen te berekenen goed te beheersen. Soms is de éne, dan weer de andere handiger.

a Bereken het snijpunt van de lijnen l en m door beide vergelijkingen om te schrijven naar de vorm $y = ...$ Doe dit algebraïsch.

b Bereken het snijpunt van l en m ook door middel van substitutie.

c En werk ten slotte de balansmethode nog een keer door.

Opgave 2

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

a $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$

b $l : 4x + 12 = 0$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 3

Welke van de drie methodes werkt het beste als je het snijpunt van de lijnen $p : 5x - 3y = 15$ en $q : 2x - 6y = 11$ wilt berekenen? Bereken dit snijpunt.

Opgave 4

Bereken het snijpunt van $l : 2x + 3y = 6$ en $m : y = 4 - \frac{2}{3}x$. Wat gaat er mis? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Het snijpunt van twee lijnen bereken je door het stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen.

a Hoeveel oplossingen kan een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden hebben? Schrijf alle mogelijke situaties op.

b Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 10$?

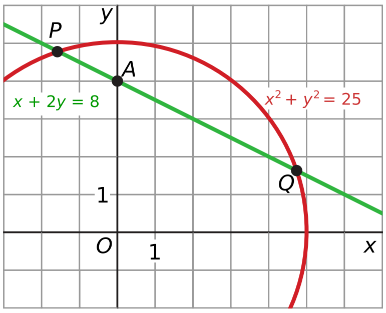
c Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 12$?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 en een lijn door (0,4) en (8,0). Om de snijpunten P en Q van beide te berekenen, stel je eerst de vergelijkingen van de lijn en de cirkel op:

- cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$
- rechte $l : x + 2y = 8$



Figuur 2

Dit stelsel los je op met de substitutiemethode. Vul $x = -2y + 8$ in de cirkelvergelijking in: $(-2y + 8)^2 + y^2 = 25$. Haakjes wegwerken geeft:
$5y^2 - 32y + 39 = 0$

Oplossingen: $y \approx 1{,}64 \vee y \approx 4{,}76$ (met de abc-formule of de grafische rekenmachine, afgerond op twee decimalen).

De snijpunten zijn: $P(-1{,}52; 4{,}76)$ en $Q(4{,}72; 1{,}64)$.

Opgave 6

Bereken de snijpunten van de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en de lijn $m : 2x - y = 4$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Hoeveel gemeenschappelijke punten kunnen een lijn en een cirkel hebben?

Opgave 8

Bereken het snijpunt van $k : y = -0{,}75x + 6{,}25$ en de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **snijpunten** van twee lijnen, een lijn en een cirkel, of twee cirkels, zijn de punten die op beide lijnen en/of cirkels liggen. Je berekent ze door het bijbehorende **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** op te lossen:

- Het snijpunt van twee rechte lijnen kun je berekenen door een van beide lijnen te herleiden tot de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Je vult dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking in. Maar soms helpt de balansmethode beter: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar op of trekt ze van elkaar af, waarbij je ervoor zorgt dat een van de variabelen wegvalt.
- De snijpunten van een rechte lijn met een cirkel kun je berekenen door de vergelijking van de lijn te herleiden tot de vorm $x = ...$ of $y = ...$ Je substitueert dan de gevonden uitdrukking in de vergelijking van de cirkel.
- De snijpunten van twee cirkels bereken je door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten weg te laten vallen. Je houdt dan een lineair verband over in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult.

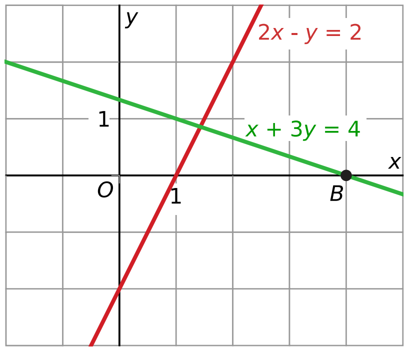
Zijn er geen oplossingen, dan spreek je van een **strijdig stelsel**. Je hebt dan bijvoorbeeld te maken met twee evenwijdige rechte lijnen of twee cirkels die elkaar niet snijden.
Beschrijven de twee vergelijkingen dezelfde lijn of dezelfde cirkel, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Je noemt dat een **afhankelijk stelsel**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de twee rechten $l: 2x - y = 2$ en $m: x + 3y = 4$.
Bereken hun snijpunt.

m is een rechte uit de familie $m_p : x + py = 4$. Door parameter p te variëren, kun je ervoor zorgen dat l en m_p geen snijpunt hebben.
Voor welke waarde van p is dit het geval?



Figuur 3

Antwoord

Schrijf de vergelijking van l als $y = 2x - 2$. Vul dit in de vergelijking van m in: $x + 3(2x - 2) = 4$. Dit geeft $x = \frac{10}{7}$ en $y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 2 = \frac{6}{7}$.

Het snijpunt is $\left(\frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Nu wil je p berekenen als l en m_p geen snijpunt hebben. Weer schrijf je de vergelijking van l als $y = 2x - 2$.
Vul dit in de vergelijking van m_p in: $x + p(2x - 2) = 4$.

Dit geeft: $(1 + 2p)x = 4 + 2p$. Deze laatste vergelijking heeft geen oplossingen als $1 + 2p = 0$.
Dus alleen voor $p = -0{,}5$ hebben l en m_p geen snijpunt.

Een andere methode is de volgende: schrijf beide vergelijkingen van de lijnen in de vorm $y = ...$ Je krijgt $l: y = 2x - 2$ en $m_p : y = -\frac{1}{p}x + \frac{4}{p}$.
De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig lopen: de richtingscoëfficiënten moeten dus hetzelfde zijn. Er moet dan gelden $2 = -\frac{1}{p}$ en dit geeft $p = -0{,}5$.

Opgave 9

Het snijpunt van $l: 2x - y = 2$ en $m: x + 3y = 4$ kan je berekenen met substitutie.
Daarbij wordt de vergelijking van l herschreven naar $y = ...$, en ingevuld in m. Voer deze berekening nog eens uit, maar nu door de vergelijking van m te herschrijven en dan in te vullen.

Opgave 10

Bereken het snijpunt van l en m ook met de balansmethode.

Opgave 11

Bereken het snijpunt van l en m.

a $l: 2x - 3y = 6$ en $m: x + 4y = 10$

b $l: 4y = -12$ en $m: 5x + 2y = 20$

c $l: 2x - 3y = 6$ en $m: y = 4 - \frac{2}{3}x$

Opgave 12

$l : 2x - y = 2$ en $m_p : x + py = 4$.

a Bereken voor welke p de lijnen l en m evenwijdig lopen.

b Gegeven zijn de lijnen $l : x + 5y = 12$ en $m_p : px - y = 4$. Voor welke waarde van p hebben deze lijnen geen snijpunt?

Voorbeeld 2

Bereken de snijpunten van de twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Antwoord

Het beste kun je nu in de vergelijking van c_2 de haakjes wegwerken:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y = \text{-}4$

Vervolgens pas je de balansmethode toe op het stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = \text{-}4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Je ziet dat er door links en rechts van het isgelijkteken van elkaar af te trekken een lineaire uitdrukking overblijft: $\text{-}4x - 6y = \text{-}29$ ofwel: $x = \text{-}1{,}5y + 7{,}25$

Dit vul je in een van beide cirkelvergelijkingen in: $(\text{-}1{,}5y + 7{,}25)^2 + y^2 = 25$

Hieruit bereken je de twee x-waarden van de snijpunten.
De twee y-waarden vind je dan weer met $x = \text{-}1{,}5y + 7{,}25$.

Opgave 13

Bereken de snijpunten van de twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Rond af op één decimaal.

Opgave 14

Bereken de snijpunten van cirkel $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$

a met de x-as.

b met de y-as.

c met de lijn $k : x + y = 1$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + (y-2)^2 = 9$ en $c_2 : (x-2)^2 + y^2 = 9$. De lijn l gaat door de middelpunten van beide cirkels.

a Bereken de snijpunten van c_1 en c_2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de snijpunten van c_1 met de beide coördinaatassen.

c Bereken de snijpunten van c_1 en l in twee decimalen nauwkeurig.

d Lijn l heeft in totaal vier snijpunten met beide cirkels. Hoeveel bedraagt de grootste afstand tussen twee van die snijpunten in één decimaal nauwkeurig?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $l_p : x + py = 4$. Voor welke waarden van p raakt de lijn l_p de cirkel c?

Antwoord

Schrijf de vergelijking van de lijn als $x = 4 - py$. Substitueer dit voor de x in de cirkelvergelijking: $(4 - py)^2 + y^2 = 4$

Haakjes wegwerken: $(1 + p^2)y^2 - 8py + 12 = 0$

Een dergelijke vergelijking los je op met de abc-formule. Je vindt dan slechts één antwoord als de discriminant 0 is. Hier betekent dit, dat: $(8p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (1 + p^2) = 0$. Ga na dat daaruit volgt: $p^2 = 3$. Je vindt dus twee waarden van p waarbij de lijn slechts één punt met de cirkel gemeen heeft en dus een raaklijn aan de cirkel is, namelijk: $p = \sqrt{3}$ en $p = -\sqrt{3}$.

Opgave 16

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 4$ en de lijn $l_p : x + py = 4$.

a Voor welke waarde van p raakt de lijn l_p de cirkel c?

Lijnen door (0,3) hebben als vergelijking $y = ax + 3$.

b Voor welke waarden van a raken deze lijnen de cirkel $c: x^2 + y^2 = 4$?

Opgave 17

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ en de lijn $m: y = 4x + p$.

Bereken voor welke waarden van p lijn m cirkel c raakt.

Verwerken

Opgave 18

Bereken de snijpunten. Rond af op twee decimalen.

a lijn $l: x + y = 6$ en cirkel $c_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

b lijn $m: 5x - 2y = 10$ en lijn $k: 2x = 12 - 3y$

c cirkel $c_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$ en cirkel $c_2 : x^2 + y^2 = 6$

Opgave 19

Voor welke waarde van a hebben de lijnen $ax + 4y = 10$ en $2x = y + 6$ geen snijpunt?

Opgave 20

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l die door de punten (0,3) en (5,0) gaat. Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c. Rond af op één decimaal.

Opgave 21

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

a Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel.

b Er zijn twee lijnen met vergelijkingen van de vorm $y = ax$ die c raken. Bereken a.

c Er zijn twee lijnen met vergelijkingen van de vorm $y = x + b$ die c raken. Bereken b.

Opgave 22

Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(7,4)$ die de lijn $l : x + y = 2$ raakt.

Opgave 23

Gegeven zijn een cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ en een lijn $l : 4x + 3y = 0$.

Stel de vergelijking op van de twee raaklijnen aan c evenwijdig met l.

Toepassen

Opgave 24: Bereik hebben

Mobiele telefoons hebben soms 'geen bereik'. Dat betekent dat er geen mast met antenne dicht genoeg in de buurt is om mee in verbinding te kunnen staan. Stel je voor dat zo'n antenne een bereik heeft van 30 km. Op 15 km van de snelweg A1 staat een mast met zo'n antenne. Gedurende hoeveel km op de A1 kun je via die antenne met je mobiele telefoon verbinding maken? Rond af op één decimaal.

Opgave 25: Gelijkbenige driehoek

Met een passer kun je gemakkelijk een gelijkzijdige driehoek construeren. Cirkel AB om vanuit punt A en daarna vanuit punt B en markeer een van de twee snijpunten van die cirkels als punt C. ΔABC is dan de gewenste gelijkzijdige driehoek. Neem een cartesisch Oxy-assenstelsel en $A(-a,0)$ en $B(a,0)$ met $a > 0$.

a Cirkel c_1 heeft middelpunt A en straal AB. Stel een vergelijking voor c_1 op.

b Cirkel c_2 heeft middelpunt B en straal AB. Stel een vergelijking voor c_2 op.

c Bereken de snijpunten van c_1 en c_2.

d Noem een van beide snijpunten C en laat met behulp van de coördinaten van A, B en C zien dat de afstanden tussen deze drie punten even groot zijn.

Testen

Opgave 26

Bereken algebraïsch de snijpunten van

a lijn $l : x + 4y = 12$ en lijn $m : 2x - 3y = -20$.

b lijn $l : x + 4y = 12$ en cirkel $c : (x-7)^2 + (y+3)^2 = 34$.

c de cirkel $c : (x-7)^2 + (y+3)^2 = 34$ en de cirkel $k : x^2 + (y+3)^2 = 13$.

Opgave 27

Voor welke waarde van p hebben de lijnen $2x + 7y = 28$ en $px - y = 15$ geen snijpunt?

Opgave 28

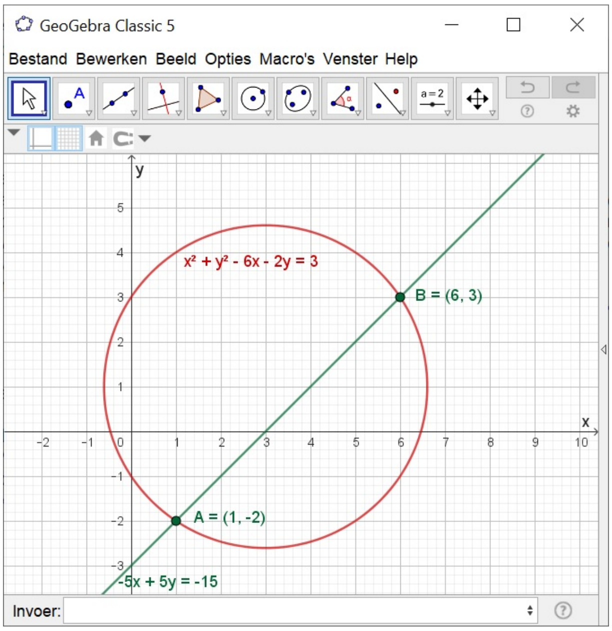
Gegeven cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l door de punten $(0,3)$ en $(5,0)$.

a Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c in één decimaal nauwkeurig.

b Er zijn twee lijnen door $(0,6)$ die cirkel c raken. Stel de vergelijkingen van die twee raaklijnen op.

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er **snijpunten** zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Door vervolgens met de rechter muisknop bij de eigenschappen van het snijpunt het label aan te zetten en te kiezen voor ‘Naam en waarde’, krijgt het snijpunt een naam en kun je de ervan coördinaten aflezen. Op deze manier kun je antwoorden controleren...



Figuur 4

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.