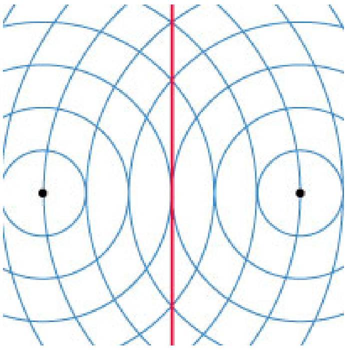
1.3 Cirkels

Inleiding

Je kunt lijnen nu vertalen naar vergelijkingen. Maar andere vormen zoals cirkels, parabolen en andere gebogen figuren (krommen genoemd) kunnen ook worden vertaald naar vergelijkingen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je een cirkel kunt beschrijven met een vergelijking in x en y;
- berekenen of punten op, binnen of buiten een gegeven cirkel liggen;
- bij een gegeven cirkelvergelijking de cirkel tekenen.

Voorkennis

- werken met cartesische coördinaten, afstanden berekenen en vergelijkingen van lijnen;
- kwadraat afsplitsen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt al kennis gemaakt met vergelijkingen van lijnen. Je weet dat die de vorm $ax + by = c$ hebben. Hoe ziet de verzameling van alle punten $P(x,y)$ er uit als ze voldoen aan de volgende vergelijking?

a $y = 2x + 6$

b $x^2 + y^2 = 25$

c $x^2 = 4$

d $y = 25 - x^2$

Uitleg

Bekijk de applet

Een cirkel in de meetkunde bestaat uit alle punten die even ver van het middelpunt liggen. Je ziet cirkel c met middelpunt $M(4,3)$ en straal 3 in een coördinatenstelsel. Het bijzondere van alle punten op deze cirkel is, dat ze op afstand 3 van M liggen. Punten die niet op de cirkel liggen, hebben een andere afstand tot M.

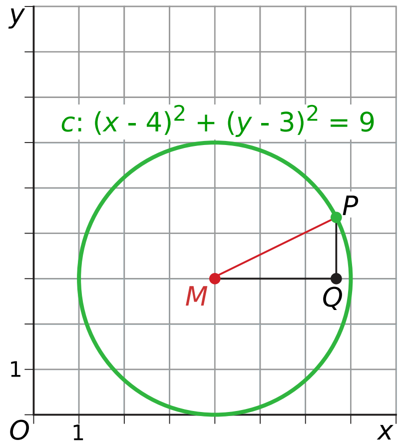
Voor alle punten P op de cirkel geldt dus $|MP| = 3$.

$|MP|$ kun je in een coördinatenstelsel met de stelling van Pythagoras berekenen: $|MQ|^2 + |QP|^2 = |MP|^2$

Noem nu de coördinaten van $P(x,y)$. Bekijk de figuur en controleer dat, afhankelijk van de plek van P op de cirkel, geldt:

- $|MQ| = x - 4$ of $|MQ| = 4 - x$
- $|QP| = y - 3$ of $|QP| = 3 - y$

Een vergelijking van een cirkel met $M(4,3)$ en straal 3 ontstaat door dit in de stelling van Pythagoras in te vullen: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2$.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven is de volgende formule voor een cirkel: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

a Controleer of de punten (1,3), (4,0), (7,3) en (4,6) inderdaad voldoen aan de formule voor de cirkel.

b Hoe kun je nagaan of het punt (6,5; 1) binnen of buiten de gegeven cirkel ligt? (Denk er aan, dat alleen tekenen geen bewijs is!)

c Experimenteer met de applet. Pas de straal van de cirkel aan en verplaats het middelpunt. Bekijk hoe de vergelijking verandert.

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je hoe de vergelijking van een cirkel er uitziet bij een gegeven middelpunt en straal.

a Stel een formule op bij een cirkel met middelpunt $M(0,0)$ en straal 5.

b Welke vergelijking hoort bij een cirkel met middelpunt $M(3,1)$ en straal 2?

c Welk middelpunt en welke straal heeft een cirkel met vergelijking

$(x+4)^2 + (y-6)^2 = 15$?

Iemand heeft bij de vergelijking van een cirkel de haakjes weggewerkt en $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ gekregen.

d Hoe kun je vanuit deze vergelijking middelpunt en straal van de cirkel bepalen?

Theorie en voorbeelden

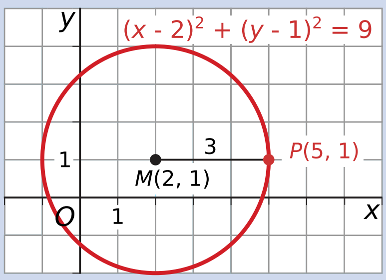
Om te onthouden

Bekijk de applet

De **vergelijking van een cirkel** in een cartesisch Oxy-assenstelsel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Door haakjes wegwerken kun je zo'n vergelijking ook de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + c = 0$ geven. Het is dan echter lastiger om middelpunt en straal van de cirkel terug te vinden. Daarvoor moet je kwadraat afsplitsen.

Als een vergelijking in x en y niet in een van deze vormen te schrijven is, dan beschrijft de vergelijking geen cirkel. Kan dat wel, dan krijg je alleen een cirkel als $r^2 > 0$.

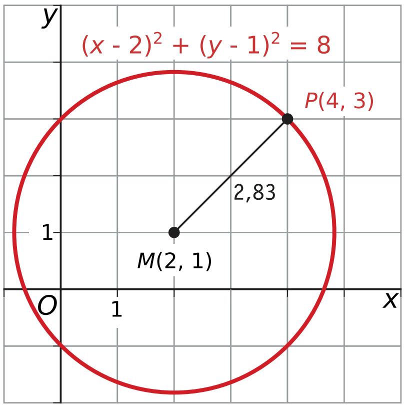


Figuur 3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Teken in een cartesisch Oxy-assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x-2)^2+(y-1)^2=8$.



Figuur 4

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(2,1)$. Voor de straal r geldt: $r^2 = 8$ en dus $r = \sqrt{8} \approx 2{,}83$. Je kunt roosterpunten op de cirkel vinden door in te zien dat $\sqrt{8} = \sqrt{4+4} = \sqrt{2^2+2^2}$. Alle punten die 2 rechts of links van M en tegelijk 2 onder of boven M liggen, zijn roosterpunten van de cirkel. Bijvoorbeeld $(2+2{,}1+2)=(4{,}3)$. Dit kun je gebruiken om de cirkel nauwkeurig te tekenen.

Opgave 3

Bepaal alle roosterpunten op de cirkel $(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

Opgave 4

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y+2)^2=13$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 5

Waarom liggen op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=7$ geen roosterpunten?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(\text{-}1{,}3)$ die gaat door het punt $P(1{,}2)$.

Antwoord

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a{,}b)$ en straal r is: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Omdat $M(\text{-}1{,}3)$, wordt dit: $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$.

P invullen geeft: $(1+1)^2+(2-3)^2=r^2$. Dus $r^2=5$.

De gevraagde vergelijking wordt $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

Opgave 6

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3{,}4)$ die gaat door punt $P(\text{-}1{,}7)$. Laat met een berekening zien dat deze cirkel ook door $O(0{,}0)$ gaat.

Voorbeeld 3

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.

Antwoord

Het is niet eenvoudig om het middelpunt en de straal uit de gegeven vergelijking af te lezen. Je kunt beter de vergelijking herleiden met behulp van kwadraat afsplitsen. Omdat $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ en $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$ kun je de gegeven vergelijking schrijven als:

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2 = (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 2 = 0$

En dit geeft:

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 11$

De cirkel heeft dus middelpunt $M(3,\text{-}2)$ en straal $\sqrt{11} \approx 3{,}32$.

Om hem te tekenen zet je eerst M in het assenstelsel. En vervolgens maak je met de passer een cirkel met M als middelpunt en straal ongeveer 3,3 eenheden. Er liggen geen roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 7

Door kwadraat afsplitsen kun je een cirkelvergelijking in een vorm brengen waarin je middelpunt en straal kunt aflezen.

Bepaal middelpunt en straal van de cirkel c met vergelijking: $x^2 + y^2 + 10x - 12y = 0$.

Opgave 8

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$. Schrijf de vergelijking van c in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Geef het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Opgave 9

Gegeven is de vergelijking van cirkel $c : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ en die van cirkel $d : x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$. Toon aan dat deze twee cirkels over elkaar heen vallen als je ze in een cartesisch assenstelsel tekent.

Opgave 10

Niet altijd levert een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ook echt een cirkel op. Je ziet of dit het geval is als je middelpunt en straal probeert te bepalen door kwadraat afsplitsen.

a Ga na dat de vergelijking $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$ een cirkel oplevert.

b Ga na dat de vergelijking $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 30 = 0$ geen cirkel oplevert.

c Wat voor figuur hoort er bij de vergelijking $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 20 = 0$?

Verwerken

Opgave 11

In een cartesisch assenstelsel Oxy zijn de punten $A(2{,}0)$, $B(7{,}3)$ en $C(0{,}5)$ gegeven.

a Stel een vergelijking op van de cirkel door C met middelpunt A.

b Stel een vergelijking op van de cirkel door B en C waarvan het middelpunt op de lijn BC ligt. Onderzoek of deze cirkel ook door A gaat.

Opgave 12

Onderzoek of de vergelijkingen bij een cirkel horen. Bereken in dat geval het middelpunt en de straal van die cirkel.

a $x^2 + y^2 - 8x - 12y = 0$

b $x^2 + y^2 = 5x$

c $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 52 = 0$

d $x^2 - 2x + 10y + 52 = 0$

Opgave 13

Gegeven zijn de punten $P(0,4)$ en $Q(4,0)$ in een cartesisch assenstelsel Oxy.

a Welk middelpunt heeft de cirkel die door O, P en Q gaat?

b Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 14

De lijn met vergelijking $2x + 3y = 6$ heeft twee snijpunten met de assen, de punten A en B. Er is een cirkel door deze twee punten waarvan het middelpunt het midden van lijnstuk AB is. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 15

Gegeven is de vergelijking van een cirkel $c_1 : x^2 + y^2 + px + 12 = 0$.

Voor welke waarde van p is c_1 een cirkel met een straal groter dan 3?

Opgave 16

Gegeven zijn de punten $A(0,0)$ en $B(6,0)$.

Stel de vergelijking op van de cirkel c door A en B met $r = 5$.

Toepassen

Opgave 17: Een ontdekking van Thales

Door de drie hoekpunten van een rechthoekige driehoek kun je altijd een cirkel tekenen waarvan het middelpunt op de schuine zijde ligt. Een van de eersten die dit opmerkte, was Thales van Milete (omstreeks 600 v.Chr.).

a Toon aan dat dit voor elke rechthoekige driehoek geldt.

Neem een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van a cm en b cm. Kies een cartesisch assenstelsel Oxy zo, dat O het hoekpunt met de rechte hoek is en de rechthoekszijden langs de assen liggen.

b Stel de vergelijking op van de cirkel die de genoemde eigenschap heeft.

Opgave 18: Een parabool

Een parabool bestaat uit punten $P(x,y)$ die een gelijke afstand hebben tot een gegeven punt en een lijn, bijvoorbeeld $F(0,2)$ en de x-as. De afstand tot de x-as is de y-waarde van P en de afstand tot punt F kun je berekenen met de afstandsformule.

a Laat zien dat de parabool kan worden beschreven door $4y = x^2 + 4$.

b Schrijf je de vergelijking van de parabool in de vorm $y = ...$, dan kun je hem in de grafische rekenmachine invoeren. Laat zien dat je een grafiek krijgt die de vorm van een parabool heeft.

c Welke vergelijking hoort bij een parabool waarvan alle punten gelijke afstand hebben tot brandpunt $B(2,0)$ en de y-as?

d Wat gebeurt er met de parabool als je in de vergelijking x en y omwisselt?

Testen

Opgave 19

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x-2)^2+(y+1)^2=13$.

a Bepaal middelpunt en straal van deze cirkel.

b Toon aan dat $A(5,1)$ op deze cirkel ligt.

c Toon aan dat $B(1,3)$ buiten cirkel c ligt.

Opgave 20

Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel c die is gegeven door $x^2+y^2-6x+5y=0$.

Opgave 21

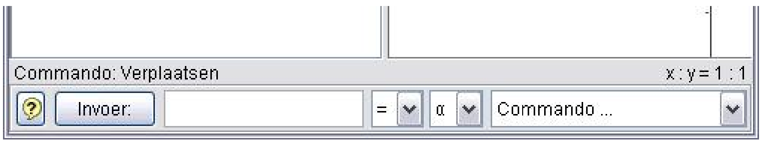
Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$ waarvan het middelpunt op de lijn $y=4$ ligt. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Practicum: GeoGebra III

Je hebt nu hopelijk een aantal keren met GeoGebra gewerkt (loop anders GeoGebra I en II nog een keer door).

In GeoGebra kun je ook **cirkelvergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER].

Zo'n cirkelvergelijking kan de vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, maar ook de vorm $x^2+y^2+px+qy+c=0$. Je kunt door met de rechter muisknop op de cirkel of de bijbehorende formule te klikken de vorm ervan aanpassen. Hiermee kun je de vergelijking van de éne vorm naar de andere overzetten.



Figuur 5

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het berekenen van het middelpunt en de straal van een gegeven cirkel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.