# 2.5 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Functieonderzoek** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

- asymptoten en limieten — scheve asymptoot
- puntsymmetrie van een grafiek — lijnsymmetrie van een grafiek
- raaklijn aan een grafiek door een punt buiten die grafiek — raken van grafieken — loodrecht snijden van grafieken — hoek tussen twee grafieken
- parameter — familie van functies

## Activiteitenlijst

- de karakteristieken van een functie systematisch berekenen — met behulp van limieten asymptoten en perforaties berekenen
- bewijzen dat een grafiek puntsymmetrisch en/of lijnsymmetrisch is
- raaklijn aan een grafiek door een punt buiten die grafiek opstellen — onderzoeken of grafieken elkaar raken — onderzoeken of grafieken elkaar loodrecht snijden — hoeken berekenen waaronder twee grafieken elkaar snijden in een cartesisch assenstelsel
- werken met functies waarin een parameter voorkomt

## Achtergronden

Het begrip **parameter** is al oud: “Een parameter is in de exacte wetenschappen een onbekende of variabele die de uiteindelijke toestand van een systeem, dan wel de uiteindelijke waarde van een uitdrukking bepaalt wanneer deze een waarde toegekend krijgt. De stand van de lichtknop is bijvoorbeeld een parameter van het lichtsysteem in de kamer. De temperatuur en de stand van de thermostaat zijn parameters van het verwarmingssysteem.” (bron: Wikipedia, 2017)

In de wiskunde wordt een parameter vooral gebruikt om algemene formules aan te duiden.

Zo is de algemene formule van een lineair of eerstegraads verband $y = ax + b$.
Hierin zijn $a$ en $b$ de parameters van het lineaire functievoorschrift met een bijpassende grafiek (in dit geval een rechte lijn) in een $Oxy$-assenstelsel.

Zo is een algemene formule van een kwadratisch of tweedegraads verband $y = ax^2 + bx + c$.
Hierin zijn $a$, $b$ en $c$ de parameters van het kwadratische functievoorschrift met een bijpassende grafiek (in dit geval een parabool) in een $Oxy$-assenstelsel.

En er bestaan nog veel meer algemene formules bij de verschillende standaardfuncties...

In computerprogramma's zoals GeoGebra, maar ook bijvoorbeeld in Excel, kunnen parameters door schuifbalkjes worden weergegeven. Je ziet dan hoe bij functies met parameters de grafiek verandert.

## Testen

### Opgave 1

Bepaal de asymptoten en perforaties van de functies. Schrijf de bijbehorende limieten op.

**a** $f(x) = \frac{5x}{x^2+5x}$

**b** $g(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

**c** $h(x) = \frac{\cos(x)+5}{\sin^2(x)}$

**d** $k(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$

## Opgave 2

Toon de symmetrie van de functies aan.

**a** $f(x) = \mathrm{e}^{-(1-x)^2}$

**b** $g(x) = \frac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} + 2$

**c** $h(x) = \frac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}$

## Opgave 3

De functie $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x$ heeft een raaklijn $l$ die door $(0, 2\,\mathrm{e})$ gaat.
Bepaal de vergelijking van de raaklijn.

## Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$.

**a** Toon aan dat de grafiek van $f$ een scheve asymptoot heeft en geef hiervan de vergelijking.

**b** Toon aan dat de grafiek van de functie puntsymmetrisch is en geef het symmetriepunt.

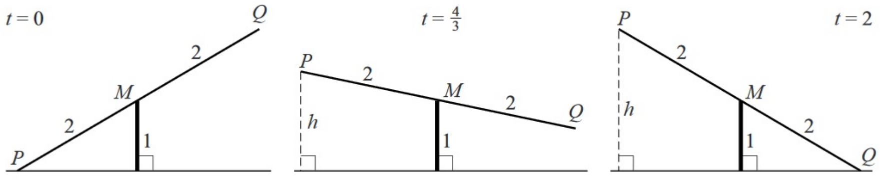
**c** Een functie $g_k(x) = (x-k)^2$ snijdt de grafiek van $f$ loodrecht.
Bepaal de mogelijke waarden van $k$ afgerond op twee decimalen.

## Opgave 5

Gegeven is een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.

Lijnstuk $PQ$ met midden $M$ en lengte 4 draait om $M$. De hoogte van $M$ is 1.
Je kijkt naar het verloop van de hoogte $h$ van $P$.
Op tijdstip $t = 0$ is de hoogte van $P$ gelijk aan 0.
Van $t = 0$ tot $t = 2$ beweegt $P$ omhoog.

In de figuur is het lijnstuk getekend op de tijdstippen: $t = 0$, $t = \frac{4}{3}$ en $t = 2$.

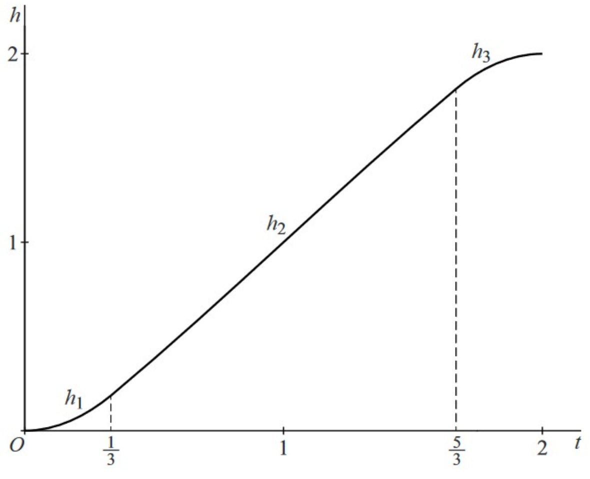



**Figuur 1**

De hoogte $h$ van $P$ tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het volgende model:

- fase 1: $h_1(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)$ voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$
- fase 2: $h_2(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$ voor $\frac{1}{3} < t < \frac{5}{3}$
- fase 3: $h_3(t) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30}\right)$ voor $\frac{5}{3} \le t \le 2$

Hierin is $h$ de hoogte, onderverdeeld in $h_1$, $h_2$ en $h_3$: de hoogtes van $P$ in de verschillende fasen.




**Figuur 2**

Voor elke waarde van $a$ met $0 \leq a \leq 1$ geldt:

$\frac{h(1-a)+h(1+a)}{2} = 1$

Bewijs deze gelijkheid.

**(naar: examen vwo wiskunde B in 2014, tweede tijdvak)**

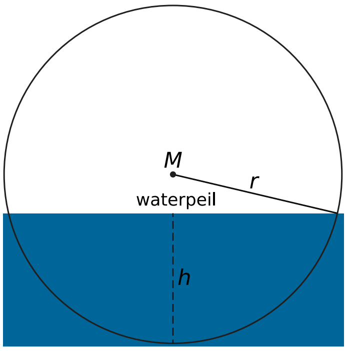
## Toepassen

### Opgave 6: Ondergedompelde bol

Een bol wordt in water gedompeld. De inhoud van het gedeelte van de bol onder het wateroppervlak wordt gegeven door:

$I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

Hierin is $r$ de straal van de bol en $h$ de hoogte van het waterpeil ten opzichte van de onderkant van de bol. In de figuur zie je een diagram van het zijaanzicht.




Figuur 3

**a** Een bol heeft een straal van 5 cm en wordt 3 cm ondergedompeld. Wat is de inhoud van het gedeelte van de bol boven het wateroppervlak? Geef een exact antwoord.

**b** Dezelfde bol wordt ondergedompeld zo, dat de inhoud van het gedeelte onder water 400 $cm^3$ is. Bereken in twee decimalen hoe ver de bol is ondergedompeld.

**c** Bepaal uit de gegeven vergelijking de formule voor de inhoud van een bol afhankelijk van $r$.

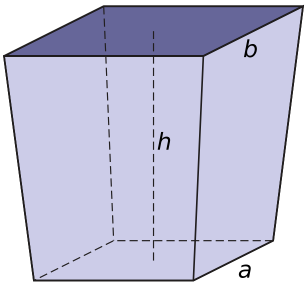
**d** Een bal wordt onder water gedompeld en vervolgens weer losgelaten. De bal schiet daarbij weer naar boven en blijft op het water drijven. Daarbij blijft $\frac{1}{32}$ deel van de inhoud van de bal onder water. Bereken wat de hoogte van het waterpeil ten opzichte van de onderkant van de bal is, uitgedrukt in $r$.

### Opgave 7: Prullenbak

Een fabrikant maakt blikken prullenbakken met een inhoud van 30 L. De bakken hebben de vorm van een ondersteboven afgeknotte vierkante piramide.

Voor de fabrikant is het belangrijk dat er zo weinig mogelijk blik wordt gebruikt bij het maken van deze prullenbakken. Dat drukt de kosten. Hiertoe moeten er specifieke afmetingen gebruikt worden voor de bakken.

Stel dat het grondvlak van de prullenbak een vierkant is met ribbe $a$, en de rand van de prullenbak een vierkant met ribbe $b$, met $a$ en $b$ in cm. De bovenkant is open. In de figuur zie je een schematisch voorbeeld.




Figuur 4

**a** Stel dat $a = \frac{3}{4}b$. Druk de oppervlakte van een prullenbak $A$ uit in $a$ en $h$.

**b** De inhoud van de afgeknotte piramide is: $I = \frac{1}{6}h\left(a^2 + (a+b)^2 + b^2\right)$.
Gebruik deze formule om de formule voor $A$ uit te drukken in $a$.

**c** Bij welke waarde voor $a$ is de hoeveelheid gebruikt materiaal het laagst? Rond af op millimeters.

### Opgave 8: Massa-veer-systeem

Een gewicht hangt aan een veer en wordt uitgerekt. Wanneer deze wordt losgelaten beweegt de veer op en neer in wat een harmonische trilling wordt genoemd. De afwijking $x$ die het gewicht heeft vanaf het evenwichtspunt wordt gegeven door:

$x(t) = u \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$ met $\lambda = \frac{k}{2m}$ en $\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \lambda^2}$

Hierin is:

- $x$ in meter;
- $t$ in seconden;
- $u$ is de beginafwijking (dus hoever de veer wordt uitgerekt) in meter;
- $k$ is de dempingscoëfficiënt in kg/s;
- $m$ is de massa van het gewicht in kg;
- $c$ is de veerconstante in N/m.

**a** Geef een uitdrukking voor de snelheid en versnelling waarmee de massa beweegt.

**b** In een massa-veersysteem hangt een massa van 4 kg aan een veer met veerconstante 20 N/m en dempingscoëfficiënt 3 kg/s. De veer wordt een halve meter uitgerekt. Plot het verloop van de trilling over de eerste 10 seconden nadat de veer wordt losgelaten.

**c** Bereken in de situatie bij b ook de snelheid en versnelling waarmee de massa beweegt op tijdstip $t = 0$.

**d** Neem hetzelfde massa-veersysteem als bij b, maar dan met de dempingscoëfficiënt 15 kg/s. Plot de bijbehorende grafiek en verklaar wat er gebeurt.

## Examen

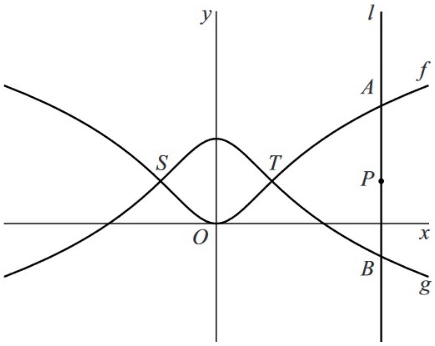
### Opgave 9: Getransformeerde grafiek

De functies $f$ en $g$ worden gegeven door:

$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2+1}\right)$

De grafieken van $f$ en $g$ staan in de figuur. Ze snijden elkaar in punten $S$ en $T$.

Lijn $l$ met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van $f$ in punt $A$ en de grafiek van $g$ in punt $B$. Het punt op lijn $l$ met $y$-coördinaat 1 noemen we $P$. In figuur I is de situatie weergegeven waarbij $l$ rechts van $T$ ligt.

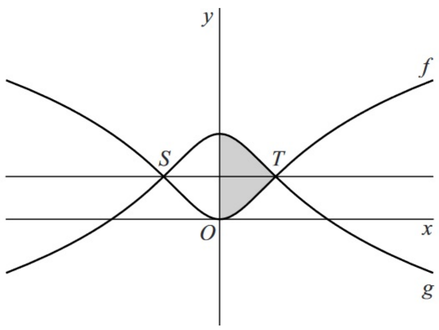


**Figuur 5 figuur I**

**a** Bewijs dat in deze situatie $AP = BP$.

Ook voor waarden van $p$ waarvoor $l$ niet rechts van $T$ ligt, geldt dat $AP = BP$. Hieruit volgt dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking $y = 1$. Deze lijn is getekend in figuur II.

In figuur II is het gebied rechts van de $y$-as dat wordt ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$ en de $y$-as, grijsgemaakt. Dit gebied wordt gewenteld om de $y$-as.



**Figuur 6 figuur II**

**b** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

De grafiek van $f$ wordt 2 naar rechts verschoven.

**c** Bewijs dat de grafiek van $f$ en de verschoven grafiek elkaar loodrecht snijden.

**(bron: examen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak)**

### Opgave 10: Het menselijk oog

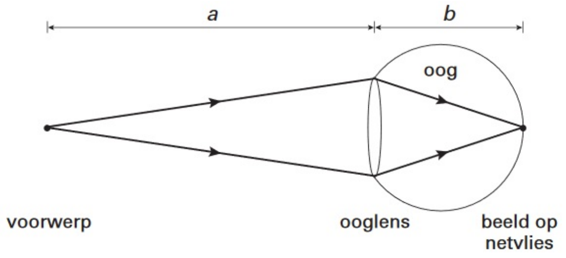
Om een voorwerp op verschillende afstanden scherp te kunnen zien heeft de mens de mogelijkheid om te accommoderen, dat wil zeggen de sterkte van zijn ogen aan te passen, zodat er een scherp beeld op zijn netvlies komt. Om een voorwerp op een afstand $a$ van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte $S$ van het oog nodig. Voor deze sterkte $S$ gebruiken we het volgende model:

$S = \frac{a+b}{a \cdot b}$

Hierbij is:

- $a$ de afstand in meters tussen het voorwerp en de ooglens;
- $b$ de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglens;
- $S$ de sterkte in dioptrieën (dpt).

Zie figuur.




**Figuur 7**

De afstand $b$ hoeft niet voor beide ogen gelijk te zijn.
Iemand heeft een rechteroog met $b = 0{,}018$ m. Hij kan de sterkte van zijn rechteroog variëren van 58 tot en met 63 dpt.

**a** Bereken op welke afstanden dit rechteroog voorwerpen scherp kan zien. Rond de grenswaarden in je antwoord af op twee decimalen.

**b** Voor zijn linkeroog geldt: $b = 0{,}017$ m.
Hiermee kan hij voorwerpen op afstanden van 15 cm en verder scherp zien.
Bereken welke waarden $S$ kan aannemen. Geef je antwoord in gehele dioptrieën.

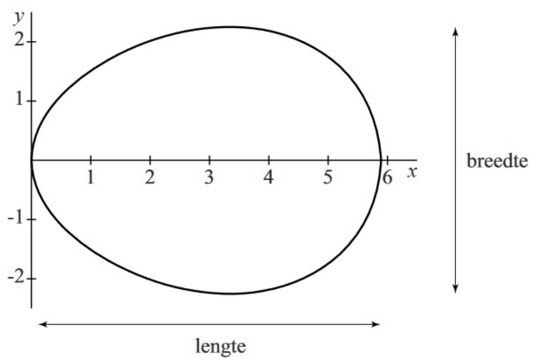
**(bron: examen vwo wiskunde B1 in 2004, eerste tijdvak)**

## Opgave 11: Een eivorm

De functie $f$ is gegeven door $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$

In figuur I is de grafiek van $f$ getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de $x$-as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op een doorsnede van een ei.

Op de $x$-as en de $y$-as is de eenheid 1 cm. In figuur I is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei.
De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.




**Figuur 8 figuur I**

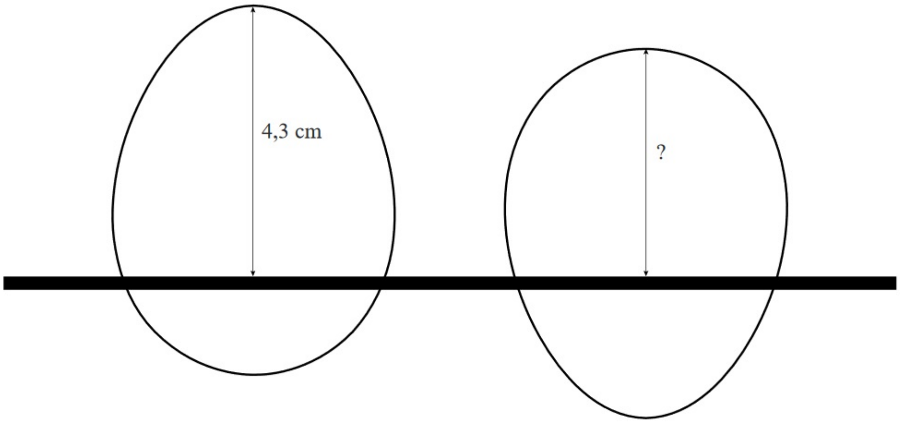
**a** Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**b** Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het ei. Geef je antwoord in een geheel aantal $cm^3$.

Een eierrekje bevat een aantal even grote ronde openingen. Zie de foto.

Wanneer we het ei van figuur I in een opening van het eierrekje plaatsen met de brede kant onder, steekt het 4,3 cm boven het rekje uit. Zie figuur II links.

**Figuur 9**




Figuur 10 figuur II

**c** We kunnen het ei van figuur I ook met de smalle kant onder in een opening van het rekje plaatsen. Zie figuur II rechts.
Bereken hoeveel cm het ei dan boven het rekje uitsteekt. Rond je antwoord af op één decimaal.

**(bron: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)**

## Opgave 12: Sinusoïde met perforaties

De functie $f$ wordt gegeven door:

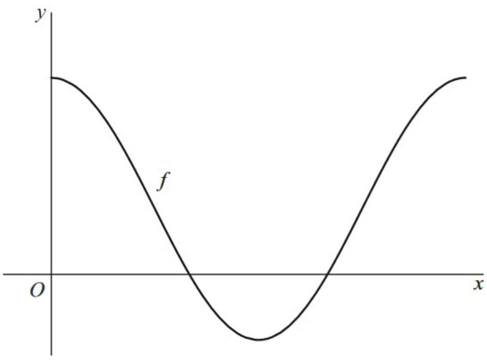
$f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)} + 1$

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van $f$ waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van $f$ is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van $f$ weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van $f$.

**(bron: pilotexamen vwo wiskunde B in 2016, tweede tijdvak)**




Figuur 11

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.