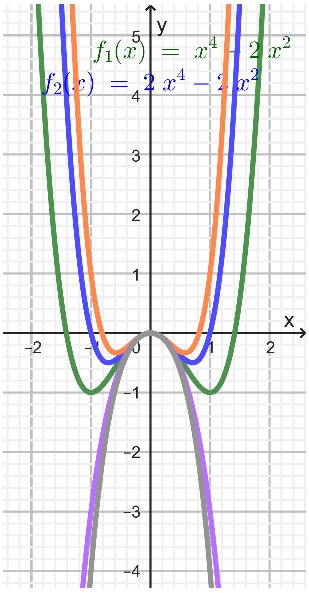
2.4 Families van functies

Inleiding

Bekijk de applet.

Je ziet hier een familie van functies. Met welke functie je te maken hebt, hangt af van de waarde van de parameter p. Je kunt nu kijken naar de eigenschappen van deze familie van functies. Bijvoorbeeld hoeveel toppen hun grafieken hebben, hoeveel snijpunten met de assen, of er een functie in deze familie waarvan de grafiek raakt aan de x-as, ...
Maar je kunt ook een waarde van p kiezen en dan vragen naar oppervlakte en omtrek van ingesloten vlakdelen, raaklijnen, e.d.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met families van functies, met parameters dus;
- alle bekende technieken gebruiken bij situaties waarin parameters voorkomen.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een grafiek opstellen, onderzoeken of grafieken elkaar raken of loodrecht snijden;
- met behulp van primitiveren en de grafische rekenmachine booglengtes, oppervlaktes begrensd door grafieken van functies en inhouden van omwentelingslichamen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = px^4 - 2x^2$.

a Toon aan dat f_p voor elke p minstens één uiterste waarde heeft.

b Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $A(3,0)$?

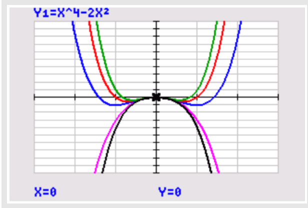
c Op welke kromme liggen alle toppen van de grafiek van f_p? Geef van deze kromme het functievoorschrift.

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk vijf grafieken van de familie van functies $f_p(x) = px^4 - 2x^2$ voor $p = 1, 2, 3, -1$ en -2.

De grafiek is afhankelijk van de waarde van de parameter p. Soms heeft die grafiek meerdere toppen, soms maar één. Maar altijd liggen de toppen van de grafiek van f_p op dezelfde kromme. Om van deze kromme een vergelijking op te stellen ga je de toppen van de grafiek bepalen.



Figuur 2

De afgeleide van f_p is $f'_p(x) = 4px^3 - 4x$.

$f'_p(x) = 0$ geeft $x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{p}$

Bij $x = 0$ hoort $y = 0$ en dit levert $(0,0)$ als top op.

Bij $x^2 = \frac{1}{p}$ hoort $p = \frac{1}{x^2}$ en dus $y = \frac{1}{x^2} \cdot x^4 - 2x^2 = -x^2$.

Dit levert voor $x \neq 0$ de toppen $\left(x, -x^2\right)$ op.
Deze toppen liggen met $(0,0)$ op de kromme met vergelijking $y = -x^2$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $A(2,3)$?

b Voor welke waarde van p hebben twee toppen van de grafiek van f_p de y-waarde -2?

c Uiteindelijk liggen alle toppen van de grafiek van f_p op de kromme $y = -x^2$.
Laat zelf zien hoe je dit kunt afleiden door alle toppen uit te drukken in p.

Opgave 2

Gegeven is de parabool met functievoorschrift $g_b(x) = 3x^2 + bx - 2$.

a De parabool gaat door het punt $A(-2, -3)$. Bereken b.

b Op welke kromme liggen alle toppen van de parabool? Laat alle tussenstappen zien in jouw afleiding.

Opgave 3

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ met domein $[0,1]$.

a De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van g in A_p en de grafiek van f in B_p. Druk de lengte van lijnstuk A_pB_p uit in p.

b Bereken voor welke waarde van p de lengte van A_pB_p maximaal is.

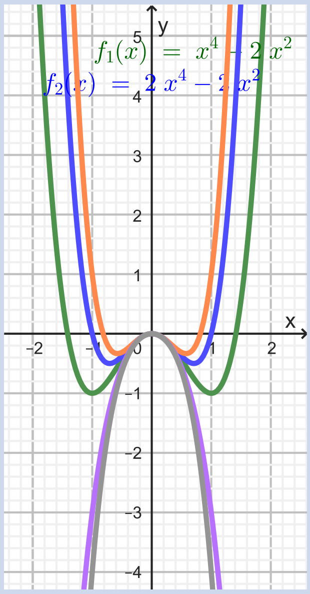
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een **familie van functies** ontstaat als in het functievoorschrift behalve de variabele x die hoort bij de horizontale as, nog een extra variabele voor komt. Die extra variabele heet een **parameter**. Hiernaast kun je de grafieken van de familie functies met voorschrift $f_p(x) = px^4 - 2x^2$ bekijken.

Bij dergelijke families van functies kun je met de bekende differentieer- en primitiveertechnieken allerlei berekeningen uitvoeren op het gebied van extremen en buigpunten berekenen, raaklijnen opstellen, onderzoeken of er van raken sprake is, oppervlakte en omtrek van ingesloten vlakdelen berekenen, inhouden van omwentelingslichamen berekenen, en nog veel meer.



Figuur 3

Voorbeeld 1

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = 0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 + a$ en $g(x) = 1{,}6x$.

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafieken van f_0 en g.

Voor welke a heeft f_a twee toppen die op de grafiek van g liggen?

Antwoord

Bekijk eerst de grafieken van f_0 en g. Je ziet dan dat er twee congruente vlakdelen door beide grafieken worden ingesloten. De totale oppervlakte van het ingesloten deel is daarom 2 keer de oppervlakte van (bijvoorbeeld) het rechter deel.

$0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 = 1{,}6x$ geeft $x = 0 \vee x^4 - 15x^2 - 16 = (x^2+1)(x^2-16) = 0$.
Dus $x = 0 \vee x = \pm 4$.

De gevraagde oppervlakte is $2 \cdot \int_0^4 1{,}6x - (0{,}1x^5 - 1{,}5x^3)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[0{,}8x^2 - \frac{1}{60}x^6 + \frac{3}{8}x^4\right]_0^4 = \frac{1216}{15}$

$f'_a(x) = 0$ geeft $0{,}5x^4 - 4{,}5x^2 = 0$ dus $x = 0 \vee x = \pm 3$. De toppen zijn $(3; 16{,}2 + a)$ en $(-3; -16{,}2 + a)$. (Het punt $(0,a)$ is een buigpunt.) De juiste waarden van a vind je door invullen in $g(x)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken zelf met behulp van primitiveren de gevraagde oppervlakte.

b Laat zien hoe de coördinaten van de toppen op de kromme worden berekend. Bereken zelf de waarden van a waarvoor die toppen op de grafiek van g liggen.

c Voor welke waarde van a is de raaklijn aan f_a evenwijdig aan de grafiek van g?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f_p(x) = \mathrm{e}^{px^2}$ met $p \neq 0$.

a Bewijs dat elke functie f_p precies één extreme waarde heeft.

b Voor welke p heeft f_p precies twee buigpunten?

c Bereken op algebraïsche wijze de vergelijking van de raaklijn aan f_p in het punt met x-coördinaat 1.

d Deze raaklijn gaat door het punt $P\left(1,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. Bereken p.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ getekend op het domein $[0,\pi]$. $ABCD$ is een rechthoek met $A(0,0)$, B op de x-as, C op de grafiek van f en D op de y-as.

Bereken de maximale oppervlakte van de rechthoek $ABCD$.

Antwoord

De gevraagde oppervlakte is $A(x) = x \cdot \sin(x)$. (Maak eventueel een schets.)

$A'(x) = \sin(x) + x\cos(x) = 0$ oplossen geeft $x = 0 \vee x \approx 2{,}03 \vee x \approx 4{,}91$.

Dit invullen in $A(x)$ geeft de maximale oppervlakte van $\approx 1{,}82$ bij $x \approx 2{,}03$.

Opgave 6

Bekijk nog eens **Voorbeeld 2**.

a Laat zien hoe het functievoorschrift van $A(x)$ wordt gevonden.

b Bereken zelf de maximale oppervlakte.

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \ln(x)$. Bereken de maximale oppervlakte van een rechthoek $OABC$ met A op de positieve x-as, C op de positieve y-as en B op de grafiek van f.

Voorbeeld 3

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p \cdot \sin^3(x)$ met $0 \leq x \leq 2\pi$.

A is het punt op de grafiek van f_p met $x = \frac{1}{4}\pi$. De raaklijn in A aan de grafiek van f_p gaat door $P(0,1)$. Bereken algebraïsch de waarde van p.

Antwoord

$f'_p(x) = 3p \cdot \sin^2(x)\cos(x)$ levert voor $x = \frac{1}{4}\pi$ de richtingscoëfficiënt: $a = 3p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{4}p\sqrt{2}$.

Een punt op de raaklijn is $A\left(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{4}p\sqrt{2}\right)$.

Omdat de raaklijn ook door $P(0,1)$ moet, is $p \approx -2{,}09$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Laat zien hoe het functievoorschrift voor $f'_p(x)$ wordt gevonden.

b Laat zien, hoe je nu de waarde van p berekent.

c Bepaal algebraïsch het bereik van f_1.

d Toon aan dat de grafiek van f_p binnen één periode voor elke p vijf buigpunten heeft.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - x + 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = 2x + p$.

a Breng de grafieken van f en g_1 in beeld.

b Bereken op algebraïsche wijze de extremen van f.

c Bereken de hoek waaronder de grafiek van f in een cartesisch assenstelsel de x-as snijdt in graden nauwkeurig.

d Bereken voor welke waarde van p beide grafieken elkaar raken.

e Bereken voor welke waarde van p beide grafieken elkaar loodrecht snijden.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn $f_p(x) = \frac{x^2+px-2}{x+3}$ en $g(x) = x + 2$.

a Bereken exact de nulpunten en de extremen van $f_1(x)$.

b Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van $f_p(x)$ géén extremen?

c Voor welke p is de grafiek van $g(x)$ een asymptoot van de grafiek van $f_p(x)$?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = 8 - 2x^2$ en $g(x) = 2^x$.

De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale lengte van lijnstuk AB als $-2 < p < 2$.

Opgave 12

Op het domein $[0,2\pi]$ is gegeven $f_p(x) = \sin^3(x) + p \cdot \sin(x)$.

a Bereken langs algebraïsche weg het bereik van $f_{-1}(x)$ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken voor welke waarde(n) van p geldt: f_p heeft een maximum van 0,25.

Opgave 13

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2+4\sin(x)}{3+2\sin(x)}$ en $g_p(x) = p - 1 + p \cdot \sin(x)$.

a Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) < g_1(x)$.

b Bereken algebraïsch de extremen van $f(x)$.

c Bereken p in het geval dat beide grafieken elkaar raken.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f_p(x) = \mathrm{e}^{-px}$.

Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p als de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f_p, de x-as, de y-as en de lijn $x = p$ gelijk is aan 0,5.

Toepassen

Opgave 15: Twee gelijke omwentelingslichamen

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Op de grafiek van f ligt het punt $P(p,q)$. A is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = p$ en de x-as. B is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = q$. De inhoud van het lichaam dat ontstaat door A om de x-as te wentelen is gelijk aan de inhoud van het lichaam dat ontstaat door B om de y-as te wentelen.

Bereken de waarden van p en q.

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn de functievoorschriften $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ en $g_p(x) = px$.

a Bereken exact de snijpunten van de grafieken van f en g_1.

b Bepaal algebraïsch het domein en bereik van f.

c Voor welke waarde van p raken beide grafieken elkaar?

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = x + 2\cos(x)$. Het vlakdeel V wordt begrensd door de grafiek van f, beide coördinaatassen en de lijn $x = 2\pi$.

a Bereken de exacte oppervlakte van V.

b Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V wordt gewenteld om de x-as.

c De lijn $y = px$ snijdt de grafiek van f in twee punten. Bereken de waarde van p waarvoor de afstand tussen beide punten maximaal is.