2.3 Raakproblemen

Inleiding

Je weet wel hoe je de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstelt als het raakpunt bekend is. Maar hoe stel je ook weer de raaklijnvergelijking op als het punt niet op de grafiek ligt? En kunnen twee grafieken elkaar ook raken? En hoe bepaal je of dit het geval is?
Kortom: er bestaan allerlei raakproblemen.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken wanneer grafieken elkaar raken, dan wel loodrecht snijden;
- de hoek berekenen waaronder grafieken elkaar in een cartesisch assenstelsel snijden;
- een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstellen ook als het gegeven punt van die raaklijn niet op de grafiek ligt.

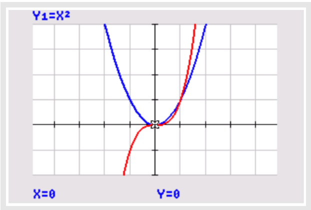
Voorkennis

- een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van een gegeven functie opstellen als het gegeven punt van die raaklijn op de grafiek ligt;
- in een cartesisch assenstelsel van twee (raak)lijnen bepalen of ze loodrecht op elkaar staan, dan wel de hoek tussen beide uitrekenen;
- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Als je beide grafieken bekijkt, zie je dat ze twee gemeenschappelijke punten hebben. In (0,0) raken beide grafieken elkaar.



Figuur 2

a Wat wordt bedoeld met de uitspraak 'beide grafieken raken elkaar'?

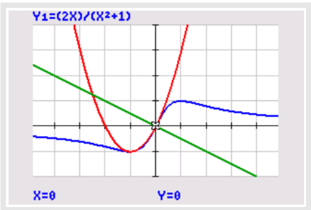
b Aan welke voorwaarden moet worden voldaan als de grafieken van twee functies elkaar raken? Bewijs dat de twee gegeven functies elkaar raken.

c De grafieken van beide functies snijden elkaar ook nog in een ander punt dan in het gemeenschappelijke raakpunt. Bereken de coördinaten van dit andere snijpunt.

d Onder welke hoek snijden f en g elkaar in dat punt?
Waarom zie je die hoek alleen in een cartesisch assenstelsel?

Uitleg 1

Hier zie je de grafieken van de functies: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $g(x) = x^2 + 2x$ en $h(x) = -\frac{1}{2}x$.



Figuur 3

De grafieken van f en g lijken elkaar te raken, want beide hebben punten gemeenschappelijk waarin ze dezelfde richting lijken te hebben.
Als dit het geval is dan moet in dit punt gelden: $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.
Uit $f(x) = g(x)$ volgt $x = 0 \vee x = -1$ en dus zijn (0,0) en (-1,-1) de gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en g.

Je hoeft nu alleen nog maar de controleren of in deze punten ook $f'(x) = g'(x)$.

De grafieken van f en h lijken elkaar loodrecht te snijden. Dat kun je natuurlijk alleen echt zien in een cartesisch assenstelsel. Als dit het geval is dan moeten hun raaklijnen in hun gemeenschappelijke punt loodrecht zijn.

In dit punt moet gelden: $f(x) = h(x)$ en $f'(x) \cdot h'(x) = -1$.
$f(x) = h(x)$ geeft $x = 0$, dus de grafieken van f en h snijden elkaar in (0,0).
Nu nog controleren of $f'(x) \cdot h'(x) = -1$ in dit punt.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Laat zelf door berekening zien dat de grafieken van f en g elkaar raken.

b Toon aan dat de grafieken van f en h elkaar in (0,0) loodrecht snijden.

c Waarom snijden de grafieken van g en h elkaar in (0,0) ook loodrecht?

Opgave 2

Bekijk de functies g en h uit **Uitleg 1**.

a Beide functies hebben behalve (0,0) nog een snijpunt.
Bereken de exacte coördinaten daarvan.

In de figuur in de uitleg zie je dat beide functies elkaar in dit tweede snijpunt niet loodrecht snijden. De raaklijn aan de grafiek van g maakt een andere hoek met de grafiek van h.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van g en bereken daarmee de hoek die deze raaklijn met de grafiek van h maakt.

De hoek die je bij b hebt berekend is de hoek tussen beide grafieken van g en h in het punt (-2,5; 1,25).

c Waarom kun je die hoek alleen goed zien in een cartesisch assenstelsel?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ en het punt $P(2,1)$.

Je ziet dat er twee raaklijnen aan de grafiek f door P gaan.
Maar hoe stel je de vergelijkingen van deze raaklijnen op?

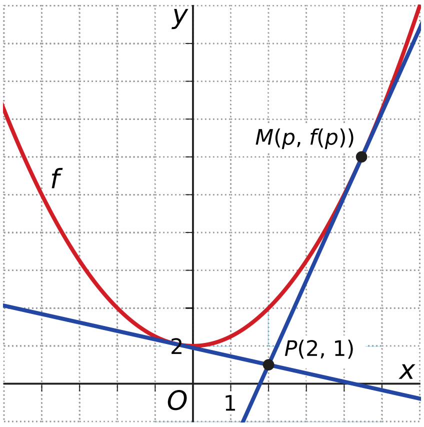
Een raaklijn k heeft de vorm $k : y = ax + b$ en heeft raakpunt $M(p, f(p))$. Dan geldt:

- richtingscoëfficiënt $a = f'(p)$
- lijn k gaat door $P(2,1)$, dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)-1}{p-2}$

Dus $f'(p) = \frac{f(p)-1}{p-2}$.

Omdat $f'(x) = x$ wordt dit: $p = \frac{\frac{1}{2}p^2+2-1}{p-2}$, zodat

$p^2 - 2p = \frac{1}{2}p^2 + 1$ en $\frac{1}{2}p^2 - 2p - 1 = 0$.



Figuur 4

Eén van beide raaklijnen heeft een positieve helling. Met de abc-formule vind je: $p = \frac{4+\sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}$.

Omdat $a = f'(p) = p$ is dit ook de richtingscoëfficiënt die raaklijn.

De vergelijking wordt daarom $y = \left(2 + \sqrt{6}\right)x + b$.

Invullen van $P(2,1)$ geeft: $b = -3 - 2\sqrt{6}$.

De vergelijking van deze raaklijn wordt: $y = \left(2 + \sqrt{6}\right)x - 3 - 2\sqrt{6}$.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Stel de vergelijking van de andere raaklijn op.

b Gegeven is het punt $Q(1,4)$. Zijn er raaklijnen aan f door dit punt?
Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Gegeven is de parabool $f(x) = -(x-4)^2 + 7$ en het punt $P(0,0)$.
Door punt P gaan twee raaklijnen k en l aan de grafiek van f.

Stel de vergelijkingen op van deze raaklijnen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gegeven zijn de functies f en g. De grafieken van f en g hebben een gemeenschappelijk punt $A(x_A, f(x_A))$. Dan geldt het volgende:

- als $f'(x_A) = g'(x_A)$ dan is A een **raakpunt** en raken beide grafieken elkaar;
- als $f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1$ dan zijn grafieken van f en g **loodrecht snijdend** in A.

Gegeven is functie f en punt $B(x_B, y_B)$ buiten de grafiek van f.

Om de **vergelijking van een raaklijn aan de grafiek van f door een punt B buiten de grafiek** op te kunnen stellen, noem je het raakpunt op de grafiek van f punt $P(p, f(p))$.

Voor de richtingscoëfficiënt van een raaklijn $l: y = ax + b$ geldt

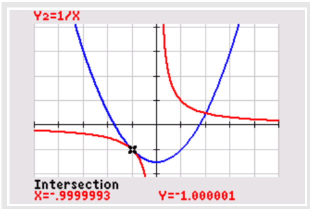
$a = f'(p) \wedge a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p) - y_B}{p - x_B}$

Uit $f'(p) = \frac{f(p) - y_B}{p - x_B}$ volgen één of meer waarden voor p, waarmee je de coördinaten van alle raakpunten P kunt berekenen en de vergelijking(en) van de raaklijn(en) kunt opstellen.

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur met de grafieken van: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

De grafieken hebben twee snijpunten. In het linker snijpunt lijken ze elkaar te raken, in het rechter snijpunt lijken ze elkaar loodrecht te snijden. Ga algebraïsch na of beide beweringen juist zijn.



Figuur 5

Antwoord

De grafieken snijden elkaar wanneer $f(x) = g(x)$.

Met de grafische rekenmachine vind je $x = -1$ en $x = 2$ voor de snijpunten.

Dus de grafieken snijden elkaar in $(-1, -1)$ en $(2, -1)$.

Wanneer twee grafieken van de functies f en g elkaar raken moet in dat punt ook gelden: $f'(x) = g'(x)$.

Er geldt: $f'(x) = x$ en $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Je vindt: $f'(-1) = -1$ en $g'(-1) = -1$.
Dus $(-1, -1)$ is een raakpunt.

Wanneer de twee grafieken elkaar loodrecht snijden moet in dat punt gelden: $f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

Hierin is $f'(2) = 2$ en $g'(2) = -\frac{1}{4}$.

Omdat $2 \cdot -\frac{1}{4} \neq -1$ snijden de grafieken elkaar niet loodrecht.

Opgave 5

Bekijk de functies in **Voorbeeld 1**.

a Bereken de snijpunten van f en g algebraïsch.

b Bereken algebraïsch de grootte van de hoek bij het rechter snijpunt.
Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 6

Onderzoek algebraïsch of de grafieken van de functies $f(x) = \text{e}^x$ en $g(x) = \text{e}^{\frac{1}{x}}$ elkaar raken of loodrecht snijden.

Voorbeeld 2

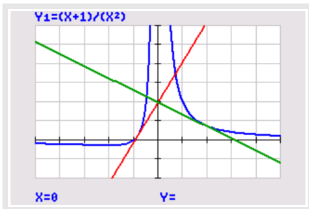
Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$.

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen door $P(0,2)$ aan de grafiek van f.
Rond af op twee decimalen.

Antwoord

De raaklijnen zijn van de vorm $y = ax + b$.
Ze raken de grafiek in punten van de vorm $M(p, f(p))$.
Er geldt:

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen is: $a = f'(p)$ dus $a = -\frac{p+2}{p^3}$
- omdat de raaklijnen door $P(0,2)$ gaan geldt: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)-2}{p-0}$



Figuur 6

Stel deze uitdrukkingen voor a aan elkaar gelijk en herleid:

$$\begin{aligned} -\frac{p+2}{p^3} &= \frac{f(p)-2}{p} \\ -\frac{p+2}{p^2} &= \frac{p+1}{p^2} - 2 \\ -(p+2) &= p + 1 - 2p^2 \\ 2p^2 - 2p - 3 &= 0 \end{aligned}$$

De abc-formule geeft: $p = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$ en $p = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Invullen in $f'(p) = a$ geeft: $a \approx 2{,}11 \vee a \approx -0{,}63$.
De vergelijkingen van de raaklijnen (in de figuur weergegeven) zijn:
$y \approx 2{,}11x + 2$ en $y \approx -0{,}63x + 2$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.
Stel de vergelijkingen van de raaklijnen v en w op door $Q(2,0)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$.

Er zijn twee raaklijnen aan f die door het punt $(0,4)$ gaan.
Stel de vergelijkingen op van deze raaklijnen.

Verwerken

Opgave 9

Bewijs dat de grafieken van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $g(x) = \sqrt{x}$ elkaar loodrecht snijden.

Opgave 10

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$.

Er is een lijn l door $P(0,-1)$ die de grafiek van f raakt.
Stel daarvan de vergelijking op.

Opgave 11

De grafiek van $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x}$ snijdt de x-as in twee punten.

a Bereken algebraïsch of de raaklijnen aan f in de twee snijpunten met de x-as loodrecht op elkaar staan.

b Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot.

c Onderzoek of de grafiek van f een raaklijn heeft die de scheve asymptoot loodrecht snijdt.

Opgave 12

Onder welke hoek snijden de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ elkaar in een cartesisch assenstelsel?

Opgave 13

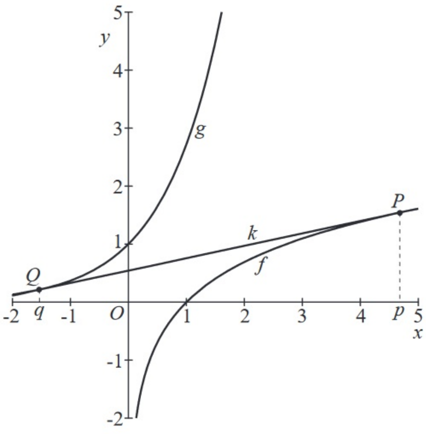
Gegeven is de functie: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{x}$.

Er zijn twee lijnen l en m door punt $Q(2,-2)$ die de grafiek van f loodrecht snijden en een positieve helling hebben.
Stel de vergelijkingen op van die lijnen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 14: Een gemeenschappelijke raaklijn

Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = e^x$. Bekijk de figuur met de grafieken van beide functies. De lijn k is een gemeenschappelijke raaklijn aan de grafieken van f en g. Het punt waarin k de grafiek van f raakt, heet $P(p, \ln(p))$, met $p > 0$. Het punt waarin k de grafiek van g raakt, heet $Q(q, e^q)$, met $q < 0$.



Figuur 7

a Omdat k een raaklijn is in punt P aan de grafiek van f, is $y = \frac{1}{p}x + \ln(p) - 1$ een formule voor k. Toon dit aan.

Omdat k een raaklijn is in punt Q aan de grafiek van g, is ook $y = e^q\, x + e^q\,(1-q)$ een formule voor k. Met de formules kan er een verband tussen p en q gelegd worden:

$\frac{1}{p} = e^q = \frac{\ln(p) - e^q}{p - q}$

b Toon dit aan.

c Toon aan dat er moet gelden: $p^{1-p}\, e^{p+1} = 1$.

d Bereken in twee decimalen de richtingscoëfficiënt van de gemeenschappelijke raaklijn k.

(bron: examen wiskunde B1,2 in 2009, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

De raaklijn l aan f gaat door $O(0,0)$. Stel de vergelijking op van l.

Opgave 16

Gegeven is $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x\sqrt{x}$ met $x \geq 0$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de extremen van f.

b Bereken algebraïsch de hoeken waaronder de grafiek van f de x-as snijdt.

c Er is een lijn door $(8,0)$ die de grafiek van f loodrecht snijdt en een positieve richtingscoëfficiënt heeft. Bereken de coördinaten van het snijpunt van deze lijn met de grafiek van f.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.