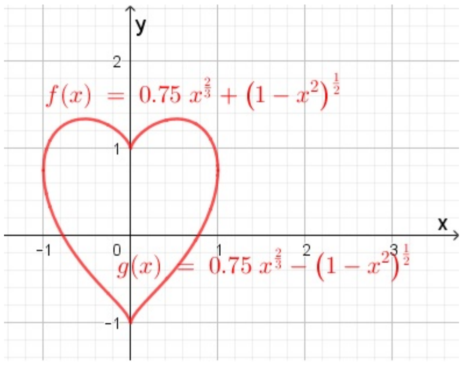
2.2 Symmetrie

Inleiding

Soms zijn grafieken van functies mooi symmetrisch. Maar hoe weet je zeker dat een grafiek symmetrisch is? Welnu, dan moet er bij elk punt van de grafiek een symmetriepunt horen dat ook op de grafiek ligt. Hoe je bij een punt op de grafiek zo'n symmetriepunt vindt, hangt af van de soort symmetrie. Hier zie je twee symmetrische functies die toch mooi één geheel vormen. Kun je zelf van die mooie symmetrische grafieken bedenken?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- symmetrie in de grafiek van een functie herkennen;
- door berekening de symmetrie in de grafiek van een functie aantonen.

Voorkennis

- lijnsymmetrie en puntsymmetrie herkennen in een figuur;
- de karakteristieken van een functie berekenen, ook met behulp van differentiëren en limieten.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

a Breng de grafiek van f in beeld.

b Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 0$.

c Is de grafiek van f ook puntsymmetrisch?

Uitleg 1

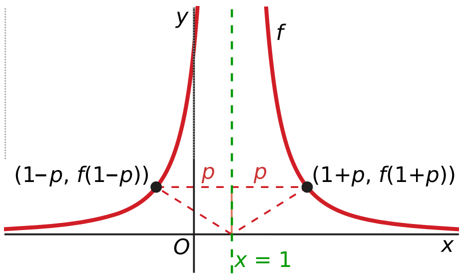
Bekijk de applet.

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

De grafiek van functie f is symmetrisch in de lijn $x = 1$.

De grafiek van een functie is symmetrisch in een lijn als er voor elk punt aan de ene kant van de lijn, op willekeurige afstand p, een punt aan de andere kant van de lijn ligt, dat op dezelfde afstand p en op dezelfde hoogte ligt.

De symmetrie kun je bij de functie f met behulp van het functievoorschrift aantonen door te bewijzen dat: $f(1-p) = f(1+p)$.



Figuur 2

$$f(1-p) = \frac{1}{((1-p)-1)^2} = \frac{1}{(-p)^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$f(1+p) = \frac{1}{((1+p)-1)^2} = \frac{1}{p^2}$$

Omdat p willekeurig is gekozen, is hiermee aangetoond dat de grafiek van functie f lijnsymmetrisch is in de lijn $x = 1$.

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe je bij een grafiek lijnsymmetrie kunt aantonen.

Gegeven is de functie f door $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
Toon aan dat de grafiek van deze functie symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 1$.

Opgave 2

Onderzoek met behulp van het functievoorschrift of de grafiek van de functie lijnsymmetrisch is ten opzichte van de y-as.

a $f(x) = \frac{e^{x^2}+1}{e}$

b $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$

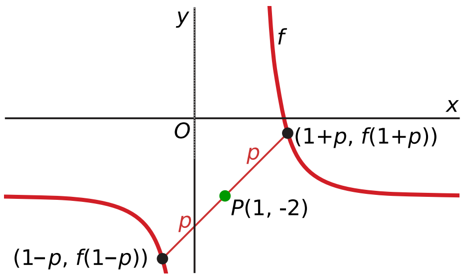
c $h(x) = x^3 - x$

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} - 2$.

De grafiek van een functie is puntsymmetrisch in een punt P als de y-coördinaat van het symmetriepunt in het midden ligt van de y-coördinaten van twee punten aan weerszijden en even ver verwijderd van het symmetriepunt.



Figuur 3

$f(1+p) = \frac{1}{((1+p)-1)^3} - 2 = \frac{1}{p^3} - 2$

$f(1-p) = \frac{1}{((1-p)-1)^3} - 2 = \frac{1}{(-p)^3} - 2$

$= -\frac{1}{p^3} - 2$

Het gemiddelde van deze functiewaarden is:

$\frac{f(1-p)+f(1+p)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{p^3} - 2 + \frac{1}{p^3} - 2\right) = \frac{-4}{2} = -2$

Omdat $y_P = -2$ en p willekeurig is gekozen, is hiermee aangetoond dat de grafiek van functie f puntsymmetrisch is in het punt $(1, -2)$.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken het verticale verschil tussen punt $P(1, -2)$ en het punt met coördinaten $(1-p, f(1-p))$. Bereken ook het verticale verschil tussen punt P en het punt met coördinaten $(1+p, f(1+p))$.

b Hoe kun je aan de hand van het antwoord bij a concluderen dat functie f puntsymmetrisch is ten opzichte van P?

Opgave 4

Laat zien, dat de functies puntsymmetrisch zijn ten opzichte van het gegeven punt.

a $f(x) = \frac{1}{(x-3)^5} + 4$ ten opzichte van $(3,4)$.

b $g(x) = \frac{x-3}{2-x}$ ten opzichte van $(2, -1)$.

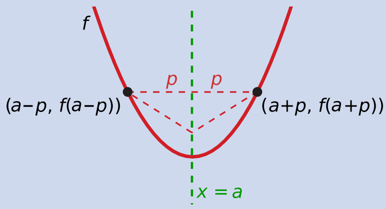
c $h(x) = \sin(x)$ ten opzichte van $(2\pi, 0)$.

Theorie en voorbeelden

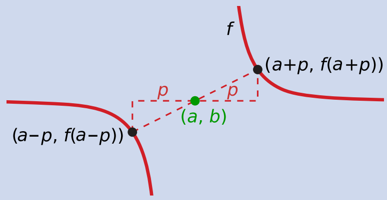
Om te onthouden

Er zijn bij grafieken van functies twee soorten symmetrie te onderscheiden: lijnsymmetrie en puntsymmetrie. Beide soorten symmetrie kunnen aangetoond worden met behulp van het functievoorschrift.

- De grafiek van een functie f is **lijnsymmetrisch** ten opzichte van de lijn $x = a$ als voor iedere willekeurige p geldt: $f(a - p) = f(a + p)$
- De grafiek van een functie f is **puntsymmetrisch** ten opzichte van punt (a,b) als voor iedere willekeurige p geldt: $\frac{f(a-p)+f(a-p)}{2} = b$



Figuur 4



Figuur 5

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$.

Toon aan dat de grafiek van $f(x)$ symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = \pi$.

Antwoord

De grafiek is lijnsymmetrisch ten opzichte van $x = \pi$ als voor willekeurige p geldt:
$f(\pi - p) = f(\pi + p)$.

Er geldt:

$$f(\pi - p) = \frac{3\cos(\pi-p)}{1+\sin^2(\pi-p)} = \frac{-3\cos(p)}{1+\sin^2(p)}$$

$$f(\pi + p) = \frac{3\cos(\pi+p)}{1+\sin^2(\pi+p)} = \frac{-3\cos(p)}{1+\sin^2(p)}$$

$f(\pi - p) = f(\pi + p)$ voor een willekeurige p, dus f is lijnsymmetrisch ten opzichte van $x = \pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom geldt $\sin^2(\pi - p) = \sin^2(p)$ en $\cos(\pi - p) = -\cos(p)$?

b In welke lijnen is de grafiek van f ook symmetrisch?

c Bewijs ook in deze lijnen lijnsymmetrie in de grafiek van f.

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3}{x^2-2x}$.

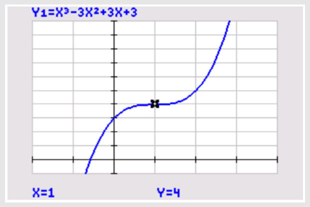
a Plot de grafiek.
Ten opzichte van welke lijn lijkt de grafiek van $f(x)$ lijnsymmetrisch te zijn?

b Bewijs dat de grafiek van $f(x)$ lijnsymmetrisch is.

Voorbeeld 2

Gegeven is: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.
Toon aan dat de grafiek van deze functie puntsymmetrisch is in $P(1,4)$.

Antwoord



Figuur 6

De grafiek is puntsymmetrisch in $P(1,4)$ als voor willekeurige p geldt:
$\frac{f(1+p)+f(1-p)}{2} = 4$
Dat wil zeggen, het gemiddelde van de functiewaarden van twee punten die op gelijke afstand p van het symmetriepunt op de grafiek liggen moet gelijk zijn aan de y-coördinaat van P.
Er geldt:

$$\begin{aligned} f(1-p) &= (1-p)^3 - 3(1-p)^2 + 3(1-p) + 3 \\ &= -p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 3 + 6p - 3p^2 + 3 - 3p + 3 \\ &= -p^3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+p) &= (1+p)^3 - 3(1+p)^2 + 3(1+p) + 3 \\ &= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - 3 - 6p - 3p^2 + 3 + 3p + 3 \\ &= p^3 + 4 \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\frac{f(1-p)+f(1+p)}{2} = \frac{-p^3+4+p^3+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Dit is gelijk aan de y-coördinaat van P, dus f is puntsymmetrisch in $P(1,4)$.

Opgave 7

Gegeven is de functie: $f(x) = 6 - \frac{1}{2}(2x+6)^3$.

a Bepaal het punt van symmetrie.

b Bewijs dat de grafiek van f puntsymmetrisch is.

c Bewijs dat de grafiek van f' ook punt- of lijnsymmetrisch is.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2x$.

a Toon aan dat $P(-3,6)$ het snijpunt is van de asymptoten van f.

b Toon aan dat P een symmetriepunt is van f.

Opgave 9

Gegeven is de functie: $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

a Toon aan dat de grafiek van de functie f lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$.

b Toon aan dat de grafiek van de functie f puntsymmetrisch is in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is: $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$.

a Toon aan dat de grafiek van f lijnsymmetrisch is in $x = 0$.

b Toon aan dat de grafiek van $f'(x)$ puntsymmetrisch is in $(0,0)$.

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = (x-2)^4 + x^2 - 4x + 7$.
Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = 2$.

Opgave 12

Gegeven is de functie: $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x}$.

a Plot de grafiek van $f(x)$.

b In welke lijn is de grafiek van $f(x)$ symmetrisch?

c Bewijs deze symmetrie.

Opgave 13

Toon aan dat de grafiek van de functie $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 1$ puntsymmetrisch is.

Opgave 14

Bewijs dat de grafiek van $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ een vorm van symmetrie heeft.

Opgave 15

Een functie f wordt voor $x < 2$ gegeven door: $f(x) = x^2 - 2$.
De grafiek van f is puntsymmetrisch in $P(2,2)$.
Geef het functievoorschrift van f voor $x \geq 2$, en controleer dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in P.

Toepassen

Opgave 16: Kansdichtheidsfunctie

Een normaal verdeelde stochast met gemiddelde μ en standaardafwijking σ heeft een zogeheten kansdichtheidsfunctie, gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

De grafiek van deze functie heet de normaalkromme. De oppervlakte van het gebied onder deze normaalkromme begrensd door twee waarden van x is het percentage van de totale oppervlakte onder de normaalkromme dat dit gebied beslaat.

Op een middelbare school wordt de reistijd naar school in minuten onder de leerlingen onderzocht. Deze reistijd blijkt normaal verdeeld te zijn met $\mu = 30$ en $\sigma = 12$. Toon aan dat de bijbehorende kansdichtheidsfunctie symmetrisch is.

Opgave 17: Symmetrie functie en afgeleide

Toon aan dat als de grafiek van een functie f puntsymmetrisch is in (a,b), de grafiek van de afgeleide f' lijnsymmetrisch is in $x = a$.

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie: $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$.

a Plot de grafiek van $f(x)$.

b Bepaal of de grafiek van f lijn- of puntsymmetrisch is.

c Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is.

Opgave 19

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{3\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$.

Toon aan dat de grafiek van $f(x)$ puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $\left(\frac{1}{2}\pi,0\right)$.