1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- goniometrische functie — de functie $f(x) = \tan(x)$
- goniometrische formules: symmetrieformules, verdubbelingsformules, somformules, formules van Simpson — verbanden tussen sin en cos
- afgeleiden van sin, cos en tan
- harmonische trilling — frequentie en trillingstijd
- primitieven van goniometrische functies

Activiteitenlijst

- werken met goniometrische functies (o.a. $f(x) = \tan(x)$ op de GR
- de goniometrische formules afleiden — de goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van goniometrische functies en het oplossen van vergelijkingen
- de afgeleide van een goniometrische functie bepalen en toepassen
- bepalen of een som van harmonische trillingen weer een harmonische trilling is
- de primitieve van een goniometrische functie bepalen en toepassen

Achtergronden

De Franse wis- en natuurkundige **Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830)** stelde dat je elke trilling kunt opbouwen door harmonische trillingen (sinusoïden dus) op te tellen. Sterker nog, hij beweerde dat je alle periodieke functies van één variabele kunt schrijven als de som van een serie sinusoïden.
Latere wiskundigen ontdekten dat dit iets te optimistisch was, er zijn bepaalde voorwaarden waaraan de functie moet voldoen.

Figuur 1 Joseph Fourier

Fourier bouwde daarbij voort op werk van **Daniël Bernoulli** die in 1753 afleidde dat de vorm van een snaar die op zeker tijdstip in trilling wordt gebracht is te beschrijven is door:
$f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \ldots$

Tegenwoordig is de Fourieranalyse die hierop is gebaseerd een belangrijk stuk wiskundige gereedschap bij het oplossen van zogenaamde differentiaalvergelijkingen. Toepassingen liggen vooral in de elektronica en de optica.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ en $g(x) = 1 + \sin(x)$.

Beide hebben ze als domein $[0,2\pi]$.
Verder is gegeven de functie h met $h(x) = f(x) - g(x)$.

a Toon aan dat de grafiek van h een zuivere sinusoïde is. Bereken de amplitude en de evenwichtsstand van h.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

c Los algebraïsch op: $f(x) < g(x)$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef alleen waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sin(x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

b $\sin(x) - \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0{,}5$

c $\sin^2(x) = 1 - 2\cos(2x)$

d $\tan(x) = \cos(x)$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0,2\pi]$.

a Waarom is de grafiek van f geen zuivere sinusoïde?

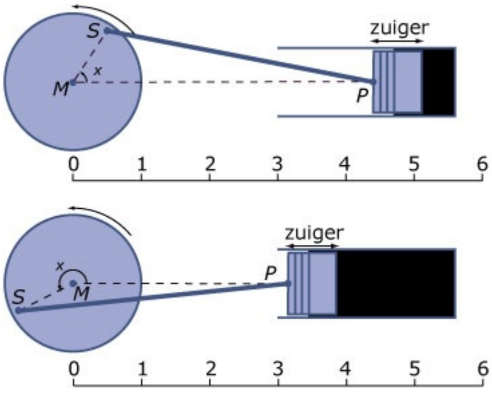
b Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.

c Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de y-as snijdt als je op beide assen dezelfde schaalverdeling gebruikt.

Opgave 4

Een zuiger is door middel van een drijfstang verbonden met een draaiende schijf. Als de schijf draait, beweegt de zuiger horizontaal heen en weer. M is het middelpunt van de schijf. S is de (scharnierende) verbinding van de drijfstang met de schijf. Bij punt P is de drijfstang scharnierend met de zuiger verbonden. $MS = 1$ en $PS = 4$. Stel de grootte van de hoek PMS is x radialen. Dan is de afstand PM afhankelijk van de hoekgrootte x. Er geldt: $PM = a(x)$. Voor elke hoekgrootte x geldt:

$a(x) = \cos(x) + \sqrt{16 - \sin^2(x)}$.



Figuur 2

a Bewijs deze formule voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

In de grafiek van a op het domein $[0,2\pi]$ zie je dat het minimum van $a(x)$ gelijk is aan 3 en het maximum gelijk is aan 5.

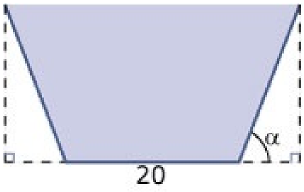
b Hoe kun je dat berekenen aan de hand van de tekening van de zuiger?

c Bij één rondgang van de schijf zal de lengte PM op twee momenten gelijk zijn aan de lengte van de drijfstang PS. Hoe groot zijn de hoeken PMS waarbij zich dat voordoet? Geef je antwoord in radialen en in één decimaal nauwkeurig.

d De afstand $a(x)$ kun je benaderen door de formule $b(x) = 4 + \cos(x)$. Bereken algebraïsch voor welke x het verschil tussen $b(x)$ en $a(x)$ maximaal is en bereken dit exact.

Opgave 5

Het Ministerie van Ontwikkelingssamenwerking geeft een bedrijf opdracht om goten te ontwikkelen voor een bevloeiingssysteem in een ontwikkelingsland. Deze goten krijgen de vorm van langwerpige bakken met twee opstaande randen die een hoek van α (in radialen) maken met de horizontale bodem. De dwarsdoorsnede van de goot is een gelijkbenig trapezium, de breedte van de bodem is net als die van de opstaande randen 20 cm.



Figuur 3

a Hoeveel liter water kan de goot per meter verwerken als $\alpha = 0{,}25\pi$?

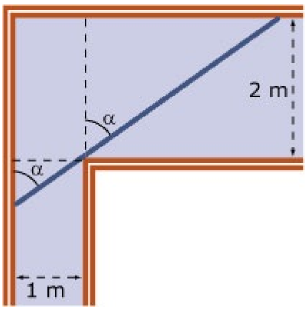
b Toon aan dat de hoeveelheid water (in L) die de goot per meter kan verwerken gelijk is aan: $W(\alpha) = 40\sin(\alpha) + 40\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$.

c Bereken de waarde van α waarvoor W zo groot mogelijk is in één decimaal nauwkeurig.

d Is dit zonder meer de meest gunstige manier van buigen? Verklaar je antwoord.

Opgave 6

Door een smalle gang moet een houten paneel van 400 cm bij 90 cm worden vervoerd. De dikte van het paneel is te verwaarlozen. Je ziet in de figuur een bovenaanzicht van de hoek die er in de gang zit. Het paneel wordt tijdens het vervoer verticaal gehouden. De gang is 2,80 m hoog. De vraag is nu of het paneel de bocht kan maken. Stel je voor dat l de grootst mogelijke lengte is die nog in de bocht past bij een bepaalde hoek α.



Figuur 4

a Laat zien dat uit deze tekening volgt: $l = \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{2}{\cos(\alpha)}$.

Hierin is α in radialen met $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.

b Laat zien dat l een minimale waarde heeft. Welke betekenis heeft die waarde?

c Kan een paneel met een lengte van 4 m deze bocht halen?

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = \cos^2(0{,}5x)$ met domein $[0,\pi]$.

a Bereken de exacte oppervlakte van het vlakdeel V ingesloten door de grafiek en de beide coördinaatassen.

b Bereken het exacte volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen.

c Bereken de lengte van het deel van de grafiek binnen dit domein in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 8: Zwevingen

Als je twee tonen met vrijwel dezelfde frequentie tegelijk laat horen merk je het (onaangename) verschijnsel **zweving** op. De applet maakt meteen duidelijk hoe dit werkt: de rode grafiek is een A van 440 Hz, de blauwe grafiek is een toon die daar v.w.b. de frequentie vlak bij zit. Je ziet hoe hun optelling een grafiek oplevert die een frequentie heeft die weinig van de A verschilt, maar waarvan de amplitude toeneemt en weer afneemt...

Bekijk de applet: Zwevingen

Stel in de applet naast de trilling $u_1(t) = \sin(2\pi\cdot 440\cdot t)$ de trilling $u_2(t) = \sin(2\pi\cdot 430\cdot t)$ in, met t in seconden.

a Stel je hoort deze trillingen tegelijk. Bekijk de grafiek van de resulterende trilling. Waaraan herken je de zweving?

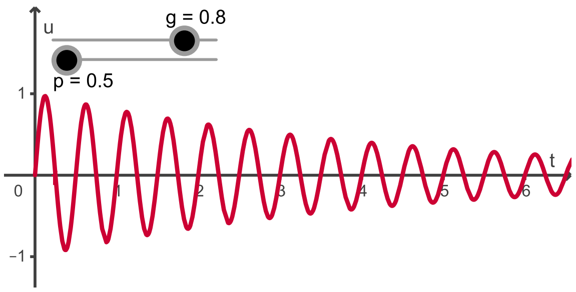
b De amplitude van de trilling is een maat voor de sterkte van het geluid. Tussen welke waarden zweeft de resulterende trilling? Welk verband is er met de amplitudes van de twee afzonderlijke harmonische trillingen?

c Onderzoek of zweving zich altijd voordoet als de frequenties van twee trillingen verschillen. Als dat niet het geval is, probeer dan vast te leggen wanneer zweving zich wel voordoet. Is er verband tussen de waarden waartussen de geluidssterkte zweeft en de amplitudes van de afzonderlijke harmonische trillingen?

Opgave 9: Gedempte trillingen

Een gedempte trilling is een trilling waarvan de amplitude met de tijd afneemt. In praktische situaties heb je bijna altijd met demping te maken: wegstervend geluid, een steeds minder uitslaande slinger, een veer die steeds minder trilt...

Bekijk de applet: Gedempte trilling.



Figuur 5

Bij een trillende snaar bijvoorbeeld wordt door de luchtweerstand de amplitude steeds iets kleiner. Op zeker moment zo klein, dat de toon niet meer te horen is. De amplitude is dan een dalende functie van t.

$u(t) = g^t \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$

Bekijk hoe de demping afhangt van g en de 'periode' p. De amplitude is $A(t) = g^t$ met $0 < g < 1$.

a Waarom is exponentiële afname in praktijksituaties van de amplitude voor de hand liggender dan lineaire afname? Beschrijf een paar van die praktijksituaties.

Neem aan dat $g = 0{,}8$.

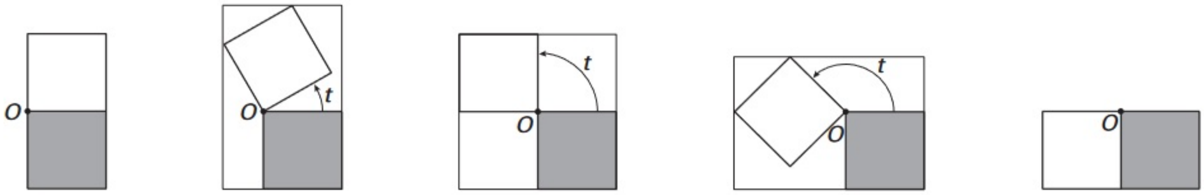
b Na hoeveel tijd is de amplitude dan telkens gehalveerd?

c Bij een periode van $p = 1$ heeft $u(t)$ een maximum op $t = 0{,}25$. Hoe groot is dit maximum? Is er een maximum dat precies de helft van dit maximum is? Zo ja, op welk tijdstip?

Examen

Opgave 10: Twee scharnierende vierkanten

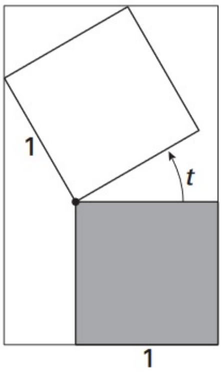
Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt O gemeenschappelijk. Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om O gedraaid; t is de draaihoek in radialen. In de volgende figuur zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.



Figuur 6

De oppervlakte R van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek t.

Voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt:
$R(t) = (1 + \sin(t))(1 + \sin(t) + \cos(t))$. In de figuur hiernaast is de situatie getekend voor een waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.



Figuur 7

a Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van $t = \frac{1}{4}\pi$.

b Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

c Teken de posities van de vierkantjes waarvoor $R(t)$ maximaal is. Licht je werkwijze toe.

d Toon met behulp van differentiëren aan dat $R'(0) = 3$.

(bron: examen wiskunde B vwo 2003, eerste tijdvak)

Opgave 11: Een verzameling functies

Op het domein $[0,2\pi]$ zijn gegeven de functies: $f_n(x) = 1 + \sin^2(x) + \cos(nx)$ waarbij n een positief geheel getal is. De grafiek van f_n gaat voor bepaalde waarden van n door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\right)$.

Als je de grafiek van f_2 door de GR laat tekenen, lijkt deze op een sinusoïde. Er geldt inderdaad $f_2(x) = a + b\sin(c(x - d))$.

a Geef een mogelijke combinatie van waarden voor a, b, c en d. Licht je antwoord toe.

b Onderzoek voor welke waarden van n tussen 0 en 50 dit geldt.

c $f_4(x)$ is te schrijven als $f_4(x) = 1{,}5 - 0{,}5\cos(2x) + \cos(4x)$. Toon aan dat dit juist is.

Gegeven is de rechthoek $OABC$ met $A(2\pi,0)$ en $C(0,3)$. De grafiek van f_4 verdeelt deze rechthoek in twee gebieden.

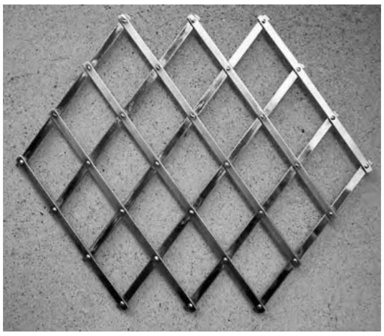
d Toon aan met behulp van integreren dat deze twee gebieden exact dezelfde oppervlakte hebben.

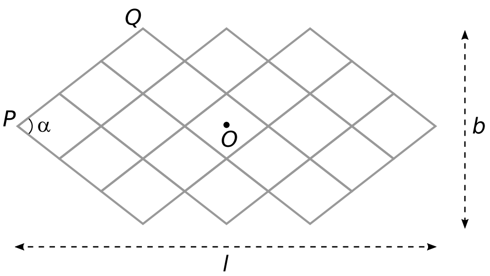
(bron: examen wiskunde B vwo 2004, eerste tijdvak)

Opgave 12: Onderzetter

Een bepaalde onderzetter bestaat uit staven die onderling kunnen scharnieren. Deze onderzetter heeft 19 gelijke ruiten.

In een wiskundig model van deze onderzetter worden de breedte en de dikte van de staven verwaarloosd. Het linker scharnierpunt van het model is P, het scharnierpunt linksboven Q en het midden van de middelste ruit is O. De grootte van de binnenhoek bij P in radialen is α met $0 \leq \alpha \leq \pi$.


Figuur 8



Figuur 9

Neem aan dat de lengte van een zijde van elke ruit 5 cm is. De lengte l en de breedte b van het model zijn functies van α. Er geldt: $l = 50\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $b = 30\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

a Toon aan dat de formules voor l en b juist zijn.

b Bereken exact de waarde van b als $l = 40$ cm.

Als we α van 0 tot π laten toenemen, zal b toenemen en l afnemen.

c Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van α de breedte even snel toeneemt als de lengte l afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

d Toon aan dat $OQ = \sqrt{100 + 125 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$.

Het model van de onderzetter kan zodanig gescharnierd worden dat zes van de acht buitenste scharnierpunten op één cirkel met middelpunt O liggen.

e Bereken voor welke waarde van α dit het geval is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

(naar: examen wiskunde B vwo 2010, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.