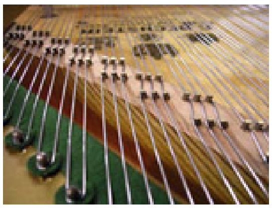
1.4 Harmonische trilling

Inleiding

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een combinatie van meerdere harmonische trillingen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- harmonische trillingen beschrijven m.b.v. sinusoïden;
- uitdrukkingen van de vorm $a \sin(x) + b \cos(x)$ herleiden tot een sinusoïde.

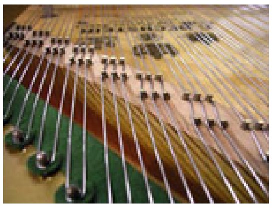
Voorkennis

- de somformules en de formules van Simpson voor goniometrische functies gebruiken;
- werken met sinusoïden;
- goniometrische functies differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.



Figuur 2

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

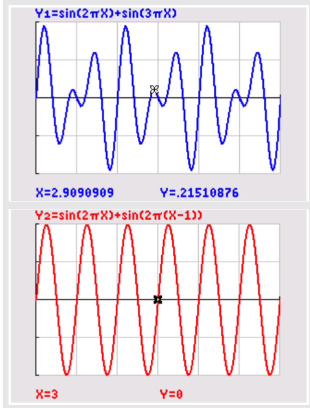
a Breng de bijbehorende grafiek in beeld op de grafische rekenmachine, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er bij instrumenten ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

b Bekijk het trillingspatroon $u(t) = 2\sin(880\pi t) + 0{,}5\sin(1760\pi t)$ met je grafische rekenmachine. Is nu nog steeds sprake van een zuivere sinusoïde?

Uitleg

Bekijk de applet: harmonische trillingen combineren



Figuur 3

Een harmonische trilling is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking uit de evenwichtsstand heeft dan bijvoorbeeld een formule van de vorm $u(t) = 4\sin(4\pi t)$, waarin u de uitwijking uit de evenwichtsstand in cm is en t de tijd in seconden. De periode van deze trilling is $\frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$ seconde.

Je kunt twee harmonische trillingen combineren. Soms zijn ze ‘in fase’ (ze starten dan op hetzelfde moment), soms niet. Neem aan dat ze dezelfde amplitude hebben en dat de evenwichtsstand 0 is. Als je ze optelt (ze werken dan tegelijkertijd) kunnen ze elkaar versterken, dan wel uitdoven. Altijd ontstaat er een nieuwe periodieke functie, niet altijd is het weer een harmonische trilling, een sinusoïde. Bekijk de figuren. Wanneer wel en wanneer niet?

Even experimenteren en je zult wel vermoeden dat dit te maken heeft met de periodes van u_1 en u_2: alleen als die gelijk zijn krijg je weer een zuivere sinusoïde.

Opgave 1

Bekijk de applet in de **Uitleg**. Met de begininstellingen $p = 1$, $q = 1$ en $r = 0$ krijg je $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot (t - 0))$ en $u = u_1 + u_2$. Bekijk deze grafieken.

a Laat algebraïsch zien dat u een sinusoïde is.

b Hebben u_1 en u_2 een faseverschil?

Je gaat nu r variëren.

c Neem bijvoorbeeld $r = 0{,}25$, dan krijg je $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot (t - 0{,}25))$. Wat gebeurt er met $u = u_1 + u_2$?

d Bij welke waarden van r wordt u een rechte lijn?

Opgave 2

Bekijk weer de applet in de **Uitleg**. Gebruik de begininstellingen $p = 1$, $q = 0{,}5$ en $r = 0$ en bekijk de grafieken van $u_1 = \sin(2\pi \cdot t)$, $u_2 = \sin(2\pi \cdot 0{,}5 \cdot t)$ en $u = u_1 + u_2$.

a De periodes van u_1 en u_2 zijn nu verschillend. Is u een sinusoïde?

b Experimenteer met de applet. Wanneer wordt u een sinusoïde?

c Je kunt de formule van u herleiden met de formules van Simpson. Hoe kun je daarna zien dat er alleen een sinusoïde kan ontstaan als de periodes van u_1 en u_2 gelijk zijn?

Opgave 3

In de applet kun je de amplitudes van u_1 en u_2 niet veranderen. Daarom kun je de formules van Simpson toepassen. Maar bekijk nu de functies $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = 2\sin(2\pi(t - 1))$.

a Breng $u_3 = u_1 + u_2$ in beeld op de grafische rekenmachine (of in GeoGebra).

b Lijkt u_3 een sinusoïde te zijn?

c Kun je dit ook algebraïsch aantonen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde. Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking u (in m) uit de evenwichtsstand is een functie van de tijd t (in s):

$u(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- Beide sinusoïden hebben dezelfde amplitude en periode maar de éne is horizontaal verschoven t.o.v. de andere. Deze horizontale verschuiving gedeeld door de periode noem je het **faseverschil**. Is er alleen sprake van een faseverschil dan levert de optelling van beide sinusoïden opnieuw een sinusoïde op: de som van twee harmonische trillingen is dan weer een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 1**.
- Beide sinusoïden hebben alleen dezelfde periode. Er is zowel een faseverschil als een verschil in amplitude. Ook in dit geval is de som van twee harmonische trillingen opnieuw een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 2**.
- Beide sinusoïden hebben verschillende periodes. Nu is de som van twee harmonische trillingen geen zuiver harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 3**.

Voorbeeld 1

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(t-2)$.
Beide trillingen hebben dezelfde periode en amplitude, maar wel een faseverschil. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ ook een harmonische trilling is.

Antwoord

Het faseverschil van beide trillingen is $\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

In dit geval (gelijke periodes en gelijke amplitudes) zijn de formules van Simpson goed bruikbaar:

$u(t) = \sin(t) + \sin(t-2) = 2\sin(t-1)\cos(1) \approx 1{,}08\sin(t-1)$

Je krijgt dus door u_1 en u_2 op te tellen een sinusoïde met een amplitude van ongeveer 1,08 en een periode van 2π. Iets dergelijks vind je steeds als je twee harmonische trillingen met gelijke periodes en gelijke amplitudes optelt: de som is dan weer een harmonische trilling. Als de éne formule een sinus en de andere een cosinusfunctie is, zet je die cos-functie eerst om in een sinus (of de sin in een cos).

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode en amplitude worden opgeteld. Met de formules van Simpson kun je aantonen dat $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een sinusoïde is. Laat dit zelf zien als

a $u_1(t) = \sin(t)$ en $u_2(t) = \sin(t-2) + 4$

b $u_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-2)\right) + 4$

c $u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-2)\right) + 4$

d $u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $u_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}(t+3)\right) + 2$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt ook het faseverschil van u_1 en u_2 berekend.

a Licht deze berekening toe.

b Bereken het faseverschil van u ten opzichte van zowel u_1 als u_2. Wat valt je op?

c Kun je een algemene regel bedenken voor het faseverschil van de som van twee sinusoïden met dezelfde amplitude en dezelfde periode?

Voorbeeld 2

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = 2\sin(t) + 1$ en $u_2 = \sin(t-2)$.
Beide trillingen hebben alleen dezelfde periode. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ ook een harmonische trilling is.

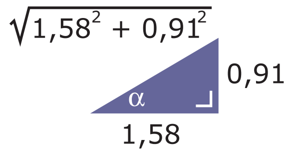
Antwoord

Omdat de amplitudes verschillen kun je de formules van Simpson niet toepassen. Wel kun je $\sin(t-2)$ uitwerken:
$\sin(t-2) = \sin(t)\cos(2) - \cos(t)\sin(2)$.

Hiermee wordt: $u(t) \approx 1{,}58\sin(t) - 0{,}91\cos(t) + 1$.

Nu is er een hoek α met: $\cos(\alpha) = 1{,}\frac{58}{\sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}}$ en

$\sin(\alpha) = 0{,}\frac{91}{\sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}}$.



Figuur 4

En dus is:

$$u(t) = \sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}\cdot\left(\sin(t)\cdot\frac{1{,}58}{\sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}} - \cos(t)\cdot\frac{0{,}91}{\sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}}\right) + 1 =$$

$$= \sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}\cdot(\sin(t)\cos(\alpha) - \cos(t)\sin(\alpha)) + 1 =$$

$$= \sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}\cdot\sin(t-\alpha) + 1.$$

De hoek α bereken je uit $\tan(\alpha) \approx \frac{0{,}91}{1{,}58}$.

u is een harmonische trilling met $u(t) \approx \sqrt{1{,}58^2+0{,}91^2}\cdot\sin(t-0{,}52) + 1$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode worden opgeteld. Nu zijn echter de amplitudes verschillend. Bekijk goed hoe in dit voorbeeld wordt aangetoond dat er toch sprake is van een sinusoïde.

a Breng de grafiek van $u(t)$ in beeld op je grafische rekenmachine. Ga na dat hij op een sinusoïde lijkt en bepaal frequentie, amplitude en evenwichtslijn.

b Werk nu zelf het voorbeeld na. Bekijk goed hoe de amplitude van de sinusoïde wordt gevonden.

c Laat op dezelfde manier zien, dat $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ een sinusoïde is.

Opgave 7

Gegeven is $u_1(t) = 3\sin(t)$ en $u_2(t) = 4\cos(t)$.

a Toon aan dat $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.

b Toon aan dat $u_4(t) = u_1(t) - u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.

c Toon aan dat $u_5(t) = -u_1(t) + u_2(t)$ een sinusoïde is. Bereken de amplitude en het faseverschil met $u = \sin(t)$.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4\sin(2x)$ en $g(x) = 2\cos(2x - 5) + 1$. Het zijn beide sinusoïden. Verder is $S(x) = f(x) + g(x)$.

a Waarom is S weer een sinusoïde?

b Bewijs dat S een sinusoïde is en bereken de amplitude en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

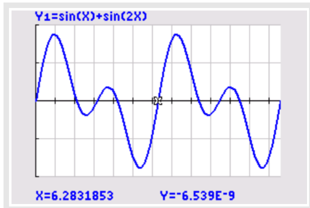
c Los algebraïsch op: $S(x) = 2$.

Voorbeeld 3

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(2t)$.
Beide trillingen hebben verschillende periodes. Toon aan dat $u = u_1 + u_2$ geen harmonische trilling is.

Antwoord

Omdat u_1 en u_2 dezelfde amplitudes hebben, kun je de formules van Simpson toepassen. Je vindt dan:
$u(t) = \sin(t) + \sin(2t) = 2\sin(1{,}5t)\cos(0{,}5t)$.



Figuur 5

Deze formule heeft niet de gedaante van een sinusoïde.
Maar $u(t)$ is wel periodiek. Omdat $\sin(t)$ zich herhaalt met een periode van 2π en $\sin(2t)$ met een periode van π, past de trillingstijd van de $\sin(2t)$ precies twee keer in die van $\sin(t)$. De periode is daarom 2π.
(In het algemeen is in een dergelijk geval de periode het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van beide afzonderlijke periodes.)

Opgave 9

Bekijk de twee harmonische trillingen in **Voorbeeld 3**. Hun som is geen harmonische trilling.

a Waarom niet?

Neem nu $u_1(t) = \sin(3t)$ en $u_2(t) = \sin(4t)$.

b De grafiek van $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ is geen harmonische trilling, maar wel periodiek. Toon dit aan.

c Hoe leid je de periode van u af uit die van u_1 en die van u_2?

Verwerken

Opgave 10

Ga nog eens uit van twee harmonische trillingen u_1 en u_2. Onderzoek in elk van de volgende gevallen of $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een harmonische trilling is. Bepaal in dat geval de frequentie en amplitude.

a $u_1 = 2\cos(t)$ en $u_2 = 5 + \sin(t)$

b $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi t)$

c $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi(t - 2))$

d $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(100\pi t)$

Opgave 11

Figuur 6

Je kunt met een hoorn lage tonen spelen. Zo'n toon heeft bijvoorbeeld een frequentie van 80 Hz. De toon kun je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 10.
Op een hobo speel je hogere tonen met een frequentie van bijvoorbeeld 400 Hz. Deze toon kun je je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 5.

a Stel voor beide tonen een formule op voor de bijbehorende sinusoïde.

b Iemand hoort de beide tonen tegelijk. Teken de grafiek van de toon die hij hoort. Zorg ervoor dat er precies twee periodes zichtbaar zijn.

c De amplitudes zijn een maat voor de sterkte van het geluid. Welke amplitude heeft de grafiek die je bij b hebt gemaakt?

Opgave 12

Twee trillingen hebben alleen een faseverschil. Als voor de ene trilling geldt $y_1 = \sin(t)$ dan geldt voor de andere $y_2 = \sin(t - p)$. Een puntmassa trilt onder invloed van beide trillingen.

a Waarom trilt deze puntmassa zuiver harmonisch?

b Voor welke waarden van p trilt deze puntmassa met een amplitude van 2?

c Voor welke waarden van p komt deze puntmassa niet in beweging?

d Voor welke waarden van p trilt de puntmassa met een amplitude van 1,5?

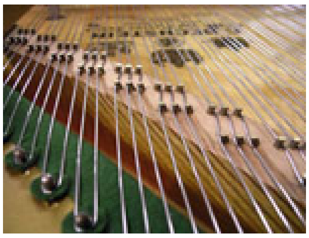
Opgave 13

Een passerend schip veroorzaakt op een rivier een golf die tegen de wal wordt teruggekaatst. Gedurende enige tijd ondervindt een klein vissersbootje zowel invloed van de oorspronkelijke golf als van de teruggekaatste golf. Bij de terugkaatsing wordt door demping de amplitude kleiner en wel $\frac{2}{3}$ deel van de oorspronkelijke amplitude.
De teruggekaatste golf is het spiegelbeeld van de voortzetting van de oorspronkelijke golf. Stel je voor dat voor de oorspronkelijke golf geldt $h(t) = \sin(t)$ met t in radialen. Verder bevindt de dichtstbijzijnde golftop zich $\frac{5}{6}$ periode uit de wal.

a Toon nu aan dat voor de combinatie van beide golven geldt: $h(t) = \sin(t) + \frac{2}{3}\sin\left(t + 3\frac{1}{3}\pi\right)$.

b Toon aan dat de combinatie van beide golven een sinusoïde is. Welke amplitude heeft deze sinusoïde?

Toepassen



Figuur 7

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

In de applet zie je een geluidsspoor van de grondtoon A van 440 Hz (rood). Ook zie je een geluidsspoor van een A zoals die op een klarinet wordt gespeeld (blauw). Je kunt aan de grondtoon boventonen toevoegen en bekijken hoe het geluidsspoor verandert. Je kunt zo het geluidsspoor van de A op de klarinet nabootsen.

Bekijk de applet

Opgave 14

Bekijk het trillingspatroon van een A van 440 Hz gespeeld op de klarinet.

a Maak zelf dit trillingspatroon na met de applet.

b Welke formule hoort er bij?

Opgave 15

Van een aangeslagen pianosnaar zijn de grondtoon en de eerste en de tweede boventoon hoorbaar. Voor de grondtoon geldt de formule $u_0 = \sin(880\pi t)$. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en een amplitude die half zo groot is. De tweede boventoon heeft een frequentie die drie keer zo groot is en een amplitude die net zo groot is als die van de grondtoon.

a Het geluid dat deze snaar produceert ontstaat door deze trillingen op te tellen. Welke formule geldt voor de trilling van de snaar?

b Waarom trilt de snaar niet zuiver harmonisch? Welke frequentie heeft de trilling?

Testen

Opgave 16

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen. Laat door berekening zien in welk van de volgende gevallen de puntmassa zelf ook zuiver harmonisch trilt. Bepaal in die gevallen de frequentie en de amplitude van de trilling.

a $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(t + 2)$

b $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(2t)$

c $u_1 = 5\sin(220\pi t)$ en $u_2 = 10 + 3\sin(220\pi t)$