1.3 Goniometrische functies differentiëren

Inleiding

Als je met sinusoïden hebt gewerkt, dan weet je dat het hierbij gaat om functies die door transformatie kunnen ontstaan uit de grafiek van $y = \sin(x)$ of $y = \cos(x)$. Een sinusoïde beschrijft een periodiek verschijnsel. De hellingswaarden van een sinusoïde veranderen daarom ook periodiek. Niet zo vreemd dus, dat de afgeleide van een sinusoïde ook zelf weer een sinusoïde is.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van de sinus-, de cosinus- en de tangensfunctie bepalen;
- de differentieerregels toepassen op functies waarin sinus, cosinus of tangens voorkomen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden;
- de differentieerregels gebruiken;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

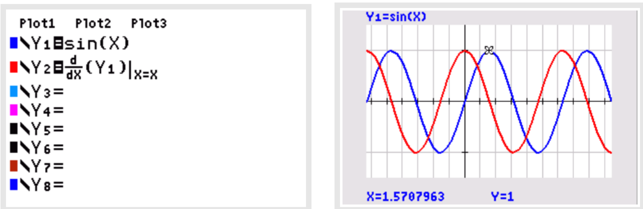
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Afgeleide sinus.

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

Je wilt $f(x) = \sin(x)$ differentiëren.



Figuur 1

a Je ziet ook de bijbehorende hellingsgrafiek. Welke functie hoort er bij die hellingsgrafiek?

Breng de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ zelf in beeld op je grafische rekenmachine.

b Welke afgeleide heeft $f(x) = \sin(x)$, denk je?

Uitleg

Bekijk de applet: Afgeleide sinus.

Het differentiëren van functies waarin sinus en/of cosinus voorkomen is gebaseerd op:

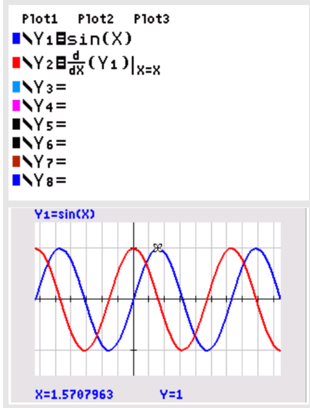
- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.

In de figuren wordt dit voor $f(x) = \sin(x)$ aannemelijk gemaakt. Je ziet hierin dat de afgeleide van f gelijk is aan $f'(x) = \cos(x)$.
Maar echt zeker weet je dit pas als je hebt aangetoond dat

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

Nu volgt uit de formules van Simpson dat

$\sin(x+h) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}h\right)\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)$ en hiermee is

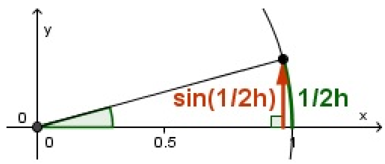


Figuur 2

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}h\right)\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)$$

Uit de figuur hiernaast kun je afleiden dat voor $h \to 0$ geldt $\sin\left(\frac{1}{2}h\right) \approx \frac{1}{2}h$. En omdat in dat geval ook $\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \approx \cos(x)$ geldt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$



Figuur 3

Hieruit kun je ook de afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ bepalen.

En de afgeleide van $h(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ bepaal je met behulp van de quotiëntregel. En zo heb je bij het differentiëren van alle functies waarin sin en cos voorkomen ook de meeste andere differentieerregels weer nodig.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ bepaald.

a Laat zelf zien dat $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$. Licht alle stappen in het bewijs toe.

b Laat zien dat de afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ gelijk is aan $g'(x) = -\sin(x)$. Maak daarbij gebruik van $\cos(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ en de kettingregel voor differentiëren.

Opgave 2

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ kun je vinden door de quotiëntregel voor differentiëren en de afgeleiden van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ te gebruiken. Laat dat zien.

Opgave 3

Met behulp van de al bekende differentieerregels en de regels voor het differentiëren van de drie standaard goniometrische functie die je hierboven hebt afgeleid, kun je alle functies differentiëren. Even oefenen met name bij goniometrische functies is nog nuttig. Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2\sin(x)$

b $f(x) = \sin(2x)$

c $f(x) = \sin^2(x)$

d $f(x) = x^2 \sin(x)$

e $f(x) = 4\cos(2x) - \sin(2x) + 1$

f $f(x) = \cos^2(x) + 3\cos(x)$

g $f(x) = \tan(3x)$

h $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Het bewijs hiervan heb je bij de **Uitleg** gezien.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel en met de constante-regels.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = -10 + 20\sin(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$ met domein $[-10, 10]$.
Stel m.b.v. differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

$f'(x) = 20\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi) \cdot 0{,}1\pi = 2\pi\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$.

Daaruit volgt: $f'(0) = 2\pi\cos(-0{,}2\pi) \approx 5{,}08$.
Verder is: $f(0) = -10 + 20\sin(-0{,}2\pi) \approx 21{,}76$.

De vergelijking van de raaklijn wordt bij benadering: $y = 5{,}08x - 21{,}76$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet daar hoe de vergelijking van de raaklijn aan een sinusoïde wordt opgesteld. Differentieer nu de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 0$.

a $f(x) = 20\sin(440\pi x)$

b $f(x) = x\cos(x)$

c $f(x) = x^2\cos(3x)$

d $f(x) = \tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

Opgave 5

Gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie door differentiëren.

b Met welke formule hangt het resultaat samen?

Voorbeeld 2

Bij in- en uitademen varieert het longvolume V (in liters) periodiek met de tijd t (in seconden). Stel je voor dat iemands longvolume varieert tussen 3,05 en 3,15 L en dat deze persoon 40 keer per minuut in- en uitademt. Neem verder aan dat $V(t)$ een zuivere sinusoïde is.
Op $t = 0$ is zijn longvolume maximaal. Bereken de grootste snelheid van uitademen.

Antwoord

Dit is een passende formule: $V(t) = 3{,}10 + 0{,}05\cos\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right)$.

Hierin is t in seconden (er gaan 40 ademhalingen in 60 seconden, dus de periode is 1,5 sec.).

De grootste snelheid van uitademen vindt plaats als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum. Bijvoorbeeld op $t = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$.

Die snelheid is dan gelijk aan de afgeleide van $V(t)$ op dat tijdstip.

Nu is: $V'(t) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5}$.

En daarom is: $V'(0{,}375) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot 0{,}375\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5} \approx -0{,}209$.

De maximale snelheid van uitademen is ongeveer 0,2 L/s.

Opgave 6

Voorbeeld 2 gaat over iemands longvolume en de snelheid van in- en uitademen.

a Laat zien hoe je de formule voor $V(t)$ uit de tekst kunt afleiden.

b Leg uit waarom de grootste snelheid van uitademen plaatsvindt als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.

c Voer nu zelf de berekening van die maximale snelheid van uitademen uit.

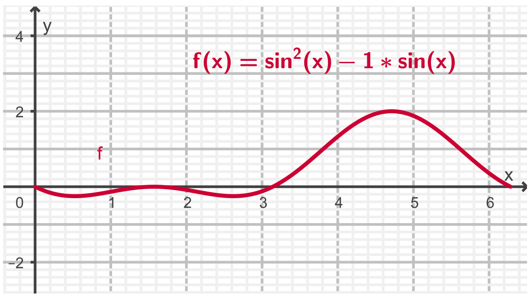
d En bij welke waarden van t krijg je de grootste snelheid van inademen? Hoe groot is die snelheid?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafiek van een functie f van de vorm $f(x) = \sin^2(x) - p\sin(x)$. Het domein van deze functie is $[0,2\pi]$. Hier is $p = 1$ en heeft de grafiek van f vier extremen.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f vier extremen?



Figuur 4

Antwoord

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - p\cos(x) = 0$
geeft:
$\cos(x)(2\sin(x) - p) = 0$
en dus:
$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = 0{,}5p$.

Op $[0,2\pi]$ heeft $\cos(x) = 0$ twee oplossingen.
Dan moet dit ook gelden voor $\sin(x) = 0{,}5p$.
Dit betekent $-1 < 0{,}5p < 1$ en $p \neq 0$.
Dus moet $-2 < p < 2$ en $p \neq 0$.

Opgave 7

Bekijk de familie van functies met vier extremen in **Voorbeeld 3**.

a Neem $p = -1$ en bereken alle vier de extremen van deze functie.

b Laat zien dat de grafiek van f een voor elke p een top in $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ heeft.

c Er zijn twee waarden van p, waarvoor het grootste maximum tweemaal zo groot is als het kleinste maximum. Bereken die waarden van p.

Opgave 8

Gegeven de functie $f(x) = \tan(ax)$. Voor welke a is de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ evenwijdig met de lijn $2x + y = 6$?

Verwerken

Opgave 9

Differentieer deze goniometrische functies en bereken daarna algebraïsch de eventuele toppen van bijbehorende grafieken.

a $f_1(x) = \cos^2(x)$

b $f_2(x) = 4\sin(2x - 0{,}25\pi) + 10$

c $f_3(x) = \cos^2(x) + \cos(x)$

d $f_4(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

Opgave 10

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 1$.

a Bereken de exacte extremen van deze functie.

b Bereken algebraïsch de buigpunten van deze functie.

Opgave 11

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{8}\tan(x) - \sin(x)$.

a Bereken algebraïsch de extremen van deze functie.

b Toon aan dat $(0,0)$ een buigpunt van de grafiek is. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dat buigpunt.

Opgave 12

Op het domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = (2 - \cos(x))(1 + \cos(x))$.

a Los exact op: $f(x) = 2$.

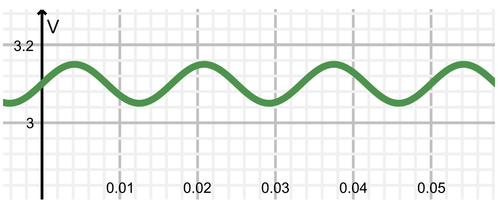
b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen?

Opgave 13

Het longvolume van een mens kun je registreren met een zogenaamde spirograaf. Bij iemand die hyperventileert geeft de spirograaf de grafiek die je hiernaast ziet. Op de horizontale as zie je de tijd in minuten.

a Hoeveel keer per minuut ademt deze patiënt uit?



Figuur 5

b Stel een formule op voor het longvolume V als functie van de tijd t in minuten. Ga ervan uit dat de grafiek een zuivere sinusoïde is.

c Benader in twee decimalen nauwkeurig de toenamesnelheid van het longvolume op $t = \frac{7}{480}$.

Opgave 14

Gegeven is op het domein $[0,2\pi]$ de functie f door $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + 1}$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van deze functie.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

c Bepaal in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk dat de grafiek van de lijn $y = \frac{1}{2}$ afsnijdt.

d De rechte lijn met vergelijking $y = -2x + a$ snijdt de grafiek van f loodrecht. Bereken a.

Toepassen

Opgave 15: Scheve evenwichtslijn

Gegeven een functie waarvan de grafiek lijkt op een sinusoïde. Alleen de evenwichtsstand is geen horizontale lijn, maar een lijn met helling van $\frac{1}{2}$. Bij deze functie hoort het voorschrift $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + 2\sin(x)$. Je spreekt nu niet van een evenwichtsstand, maar van een trendlijn.

a Welke formule geldt voor de trendlijn? Breng op je grafische rekenmachine zowel de grafiek van f als de trendlijn in beeld.

b Bereken algebraïsch de toppen van de gegeven functie.

c Vallen de x-waarden van die toppen samen met die van de toppen van $y = \sin(x)$? Geef een verklaring.

Testen

Opgave 16

Op het domein $[-2\pi,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van de functie.

b Los algebraïsch op: $f(x) > 1$.

Opgave 17

De kromme K_f is de grafiek van de functie $f(x) = x + 2\sin(x)$ op het domein $[0,2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Stel vergelijkingen op van de rechte lijnen l en m die K_f raken en evenwijdig zijn aan de lijn met vergelijking $y = x$.

c a is de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan K_f. Welke waarden kan a aannemen? Licht je antwoord toe.

Opgave 18

De grafiek van $f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ op het domein $[0,10]$ heeft precies twee nulpunten O en S en een top T. Door de lijnstukken OT en TS te trekken ontstaat driehoek OST. Punt A beweegt over de grafiek van f en punt B over de lijnstukken OT en TS. Het lijnstuk AB blijft steeds evenwijdig aan de y-as.

Bereken algebraïsch de maximale lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van goniometrische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.