# 1.2 Goniometrische formules

## Inleiding

Je hebt gezien dat goniometrische functies soms periodiek zijn, maar soms ook niet. En af en toe lijkt een op het oog lastige functie een zuivere sinusoïde als grafiek op te leveren. Om aan te tonen dat er dan ook echt van een sinusoïde sprake is, moet je het functievoorschrift kunnen herschrijven. En daarvoor heb je een aantal eigenschappen van sin, cos en tan nodig: de goniometrische formules.

**Je leert in dit onderwerp**

- de goniometrische formules (symmetrieformules, somformules, verdubbelingsformules, enz.) kennen;
- hoe je de goniometrische formules uit elkaar kunt afleiden;
- de goniometrische formules gebruiken bij het herschrijven van functievoorschriften en het oplossen van vergelijkingen.

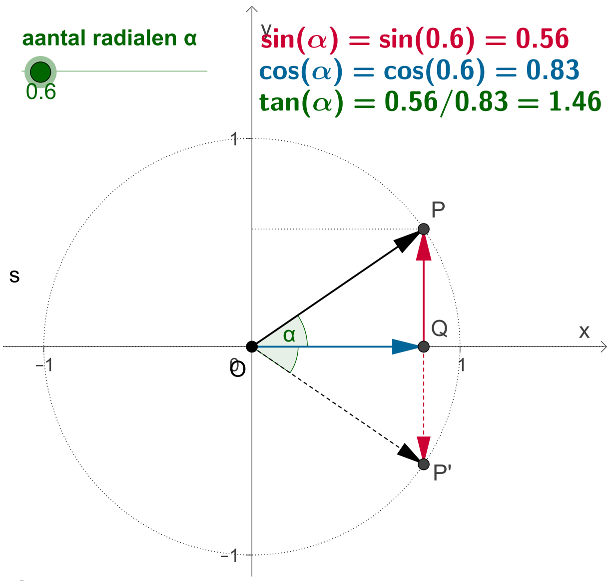
**Voorkennis**

- werken met sinusoïden en vergelijkingen met sinus en cosinus oplossen;
- goniometrische functies met de grafische rekenmachine onderzoeken;
- werken met de functie $y = \tan(x)$.

## Verkennen

### Opgave V1

**Bekijk de applet.**




Figuur 1

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

Hier zie je $\alpha$ en -$\alpha$ in één figuur.

**a** Leg uit waarom $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

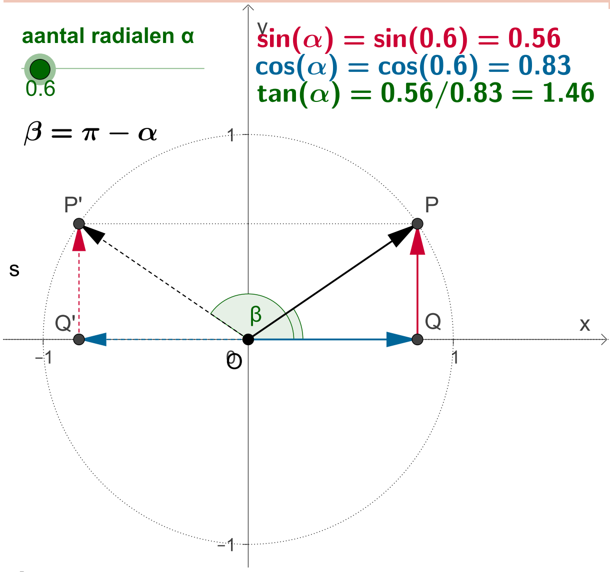
**b** Welk verband is er tussen $\sin(\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$?

**c** Kun je nog meer van dit soort symmetrieformules afleiden?

**d** Denk ook eens aan de stelling van Pythagoras. Kun je iets zeggen over $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$?

## Uitleg 1

**Bekijk de applet.**




**Figuur 2**

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

In deze figuur zie je de hoeken $\alpha$ en $\beta = \pi - \alpha$.

Omdat $\Delta OQP$ en $\Delta OQ'P'$ congruent zijn vanwege de symmetrie van de figuur geldt:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Kijk je alleen naar $\Delta OQP$ dan zie je op grond van de stelling van Pythagoras:

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Op deze wijze kun je allerlei symmetrieformules voor sin, cos en tan afleiden.
Bijvoorbeeld: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Of: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

Of: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

### Opgave 1

Bekijk de symmetrieformules die in **Uitleg 1** worden afgeleid.

**a** Laat zelf zien, dat: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

**b** Laat zien, dat: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

**c** Laat ook zien dat: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

## Opgave 2

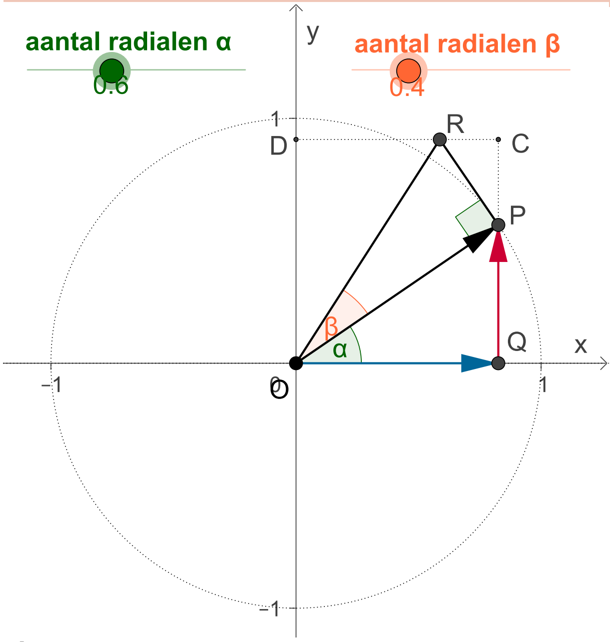
Breng de grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ op je grafische rekenmachine in beeld.

**a** Welke formule heb je nu zichtbaar gemaakt? En hoe wordt die formule in **Uitleg 1** afgeleid?

**b** Maakt het daarbij verschil of je in graden of radialen werkt?

## Uitleg 2

**Bekijk de applet.**




**Figuur 3**

Met behulp van de figuur kun je de zogenaamde somformules afleiden. Je ziet hoe hier de hoeken $\alpha$ en $\beta$ 'op elkaar gestapeld' zijn. Het is de bedoeling om $\sin(\alpha+\beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ en $\cos(\beta)$ met behulp van rechthoek $OQCD$ en de rechthoekige $\Delta OPR$. Dit gaat alleen zolang $\alpha+\beta$ tussen 0 en $0{,}5\pi$ blijft. Alle andere situaties moet je met behulp van de symmetrieformules en de eenheidscirkel tot deze herleiden!

Ga na, dat $\sin(\alpha+\beta) = \frac{QC}{OR}$.

Ga ook na, dat $\sin(\alpha) = \frac{QP}{OP}$, $\cos(\alpha) = \frac{PC}{PR}$, $\sin(\beta) = \frac{PR}{OR}$ en $\cos(\beta) = \frac{OP}{OR}$.

Dan is:

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{QP}{OP}\cdot\frac{OP}{OR} + \frac{PC}{PR}\cdot\frac{PR}{OR} = \frac{QP}{OR} + \frac{PC}{OR} = \frac{QC}{OR} = \sin(\alpha+\beta).$$

Hiermee heb je afgeleid: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.
Met behulp van de symmetrieformules kun je hier dan weer varianten op maken.
En daarbij maak je de verdubbelingsformules en de formules van Simpson...

## Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de formule $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ afgeleid. Hieruit kun je formules afleiden voor $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ en $\cos(\alpha-\beta)$. Je ziet al die formules in de **Theorie**.

**a** Leid eerst de formule voor $\sin(\alpha-\beta)$ af. Gebruik de symmetrieformules.

**b** Leid nu de formule voor $\cos(\alpha+\beta)$ af. Gebruik daarbij formules die sin omzetten in cos en omgekeerd.

**c** Uit de formule bij b kun je een formule voor $\cos(\alpha-\beta)$ afleiden. Laat zien hoe.

**d** Leid een formule af voor $\tan(\alpha+\beta)$. Zorg er voor dat er alleen de tan in voorkomt.

## Opgave 4

In **Uitleg 2** worden ook de formules van Simpson genoemd naar **Thomas Simpson** (1710—1761).

Eén van die formules is $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$.

Deze formule kun je afleiden uit de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha - \beta)$.

Probeer dat zelf te doen, neem $\alpha + \beta = p$ en $\alpha - \beta = q$.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

Dit is een overzicht van de belangrijkste **goniometrische formules**. Met behulp van de eenheidscirkel zijn de symmetrieformules, de verbanden tussen sin en cos en de eerste somformule af te leiden. Uit deze formules kun je de rest herleiden...

| **Symmetrieformules** | **Verbanden tussen sin en cos** |
|---|---|
| $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$<br>$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$<br>$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$<br>$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$<br>$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ | $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$<br>$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$<br>$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ |
| **Somformules** | **Verdubbelingsformules** |
| $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$<br>$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$<br>$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$<br>$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ | $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$<br>$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$<br>$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$<br>$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ |
| **Formules van Simpson** | |
| $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$<br>$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)$<br>$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$<br>$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(p-q)\right)$ | |

**Tabel 1**

## Voorbeeld 1

Toon aan dat de functie $f$ met $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ een sinusoïde is.

Antwoord

Je moet het functievoorschrift herleiden tot $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ (of zoiets met cos). Daarvoor moeten $\sin(x)$ en $\cos(x)$ worden opgeteld. Bij de formules waarin uitdrukkingen met sin en/of cos worden opgeteld, vind je alleen gevallen voor twee sinussen of twee cosinussen. Daarom begin je met $\cos(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$.

Je vindt: $f(x) = \sin(x) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$.

En dit wordt met één van de formules van Simpson:

$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right)\right) = 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

En dus $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

Dit is een formule van een sinusoïde.

## Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er wordt aangetoond dat $f(x) = \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$. En dus is $f$ een zuivere sinusoïde.

**a** Waarom is dat zo?

**b** Los nu algebraïsch vergelijking $f(x) = 1$ op.

**c** Waarom is het nuttig om een functievoorschrift in de vorm van een sinusoïde te schrijven?

## Opgave 6

Als je de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ optelt, krijg je de functie

$f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$. Laat zien dat je het functievoorschrift van $f$ zo kunt herleiden dat je er een zuivere sinusoïde in herkent.

### Voorbeeld 2

Leid de verdubbelingsformules af uit de somformules.
Stel ook een vergelijkbare formule op voor $\tan(2x)$.

Antwoord

Neem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.
Kies $\alpha = x$ en $\beta = x$.
Je vindt: $\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Neem $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.
Kies $\alpha = x$ en $\beta = x$.

Je vindt: $\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Met behulp van $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ kun je de twee andere formules voor $\cos(2x)$ uit de voorgaande afleiden.

$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$.

Deel je nu teller en noemer van deze breuk door $\cos^2(x)$, dan krijg je:

$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.

## Opgave 7

In **Voorbeeld 2** worden de verdubbelingsformules afgeleid.

**a** Leid alle drie de formules voor $\cos(2x)$ af die ook in de **Theorie** worden genoemd.

**b** Leid zelf de formule voor $\tan(2x)$ af.

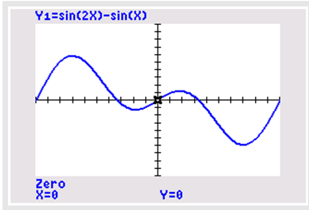
Als het goed is, vraag je jezelf af wat het nut van dergelijke formules is. Wel, soms zijn ze handig, bijvoorbeeld om een goniometrische vergelijking op te lossen.

**c** Los algebraïsch op: $\sin(2x) = 2\sin(x)$.

## Voorbeeld 3

Los op $[-\pi,\pi]$ op: $\sin(2x) - \sin(x) < 0$.

Antwoord




Figuur 4

Maak eerst de grafiek van $f$ op $[-\pi,\pi]$.

Vervolgens los je op: $\sin(2x) - \sin(x) = 0$.
Dit kun je op twee manieren doen:

- Je gebruikt $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
  Dan krijg je $2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$.
  Ontbinden geeft: $\sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$.
  En zo vind je: $\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0{,}5$.
  Oplossingen: $x = -\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \pi$.
- Je kunt ook meteen de vergelijking schrijven als $\sin(2x) = \sin(x)$.
  Dan vind je: $2x = x + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x + k \cdot 2\pi$.
  Dit geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee 3x = \pi + k \cdot 2\pi$ en dus $x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$. Dit geeft op $[-\pi,\pi]$ dezelfde vijf oplossingen.

De oplossing van de ongelijkheid wordt: $-\frac{1}{3}\pi < x < 0 \vee \frac{1}{3}\pi < x < \pi$.

### Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de vergelijking $\sin(2x) - \sin(x) = 0$ op twee manieren opgelost.

**a** Bij welke van beide manieren wordt gebruik gemaakt van symmetrie? Bij welke stap in de oplossing?

**b** Bij de andere methode wordt een verdubbelingsformule gebruikt. Bij welke stap in de oplossing?

### Opgave 9

Los algebraïsch op in $[0,2\pi]$: $\sin(2x) - \cos(x) > 0$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

## Voorbeeld 4

Gegeven is op $[-2\pi,2\pi]$ de functie $f$ met $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.
Bereken de nulpunten van deze functie en los op: $f(x) = -1$.

Antwoord

Voor de nulpunten moet je oplossen $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x) = 0$.
Hierbij maak je gebruik van $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
De vergelijking wordt dan: $2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) = 0$.
Schrijf je dit als $2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$, dan krijg je een kwadratische vergelijking in $\cos(x)$.
Die kun je oplossen met de abc-formule:

$\cos(x) = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Nu zijn benaderingen nodig, bijvoorbeeld in twee decimalen nauwkeurig:
$\cos(x) \approx 1{,}366 \vee \cos(x) \approx -0{,}366$.
Alleen $\cos(x) \approx -0{,}366$ heeft oplossingen, namelijk
$x \approx \arccos(-0{,}366) + k \cdot 2\pi \vee x \approx -\arccos(-0{,}366) + k \cdot 2\pi$.
Er zijn dus twee series nulpunten: $(1{,}95 + k \cdot 2\pi, 0)$ en $(-1{,}95 + k \cdot 2\pi, 0)$.

De vergelijking $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x) = -1$ geeft op dezelfde manier:
$2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) = -1$ en dus $2\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$.
Ontbinden is nu mogelijk en daarmee kun je gemakkelijk alle antwoorden opschrijven...

### Opgave 10

In **Voorbeeld 4** wordt de functie $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$ bekeken.

**a** Voer de berekening van de nulpunten van de grafiek van $f$ zelf uit.

**b** Maak de oplossing van $f(x) = -1$ verder af.

**c** Los in $[-2\pi, 2\pi]$ op: $f(x) < -1$.

## Verwerken

### Opgave 11

Als je de sinusoïden $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ van elkaar aftrekt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \cos(x) - \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$.

**a** Toon aan dat $f$ een sinusoïde is.

**b** Bereken met behulp van je formule bij a de toppen en de nulpunten van de grafiek van $f$.

**c** Los algebraïsch op $[0, 2\pi]$ op: $f(x) > \frac{1}{2}$. (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)

### Opgave 12

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - 1$.

**a** Bepaal de nulpunten van deze functie met de grafische rekenmachine.

**b** Laat zien dat je het voorschrift van deze functie kunt herleiden tot $f(x) = -\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$.

**c** Bereken nu de nulpunten exact.

**d** Los algebraïsch op: $f(x) > -\frac{1}{2}$.

### Opgave 13

Met domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{8}\tan(x) - \sin(x)$.

**a** Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

**b** Breng de grafiek in beeld en bepaal de toppen.

**c** Welke asymptoten heeft de grafiek?

**d** Los algebraïsch op: $f(x) \geq \frac{1}{2}\sin(x)$.

### Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

**a** $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(x) = \frac{1}{2}$

**b** $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(x)$

**c** $\cos^2(x) + \sin(x) = 1$

**d** $2\sin^2(x) - \cos(2x) = 0$

**e** $2\cos^2(x) - 2\sin(x) = 0$

**f** $\tan(x) = \sin(x)$

### Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $S(x) = f(x) + g(x)$.

**a** Onderzoek met je grafische rekenmachine of de functie $S$ een sinusoïde zou kunnen zijn.

**b** Toon algebraïsch aan dat $S$ een sinusoïde is.

**c** Los algebraïsch op: $S(x) \geq 1$.

## Toepassen

### Opgave 16: Verdrievoudigingsformules

Behalve de verdubbelingsformules voor $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ en $\tan(2x)$ kun je ook formules maken voor $\sin(3x)$, $\cos(3x)$ en $\tan(3x)$.

**a** Toon aan dat $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

**b** Toon aan dat $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

**c** Toon aan dat $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$.

### Opgave 17: Verviervoudigingsformules

Behalve de verdubbelingsformules voor $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ en $\tan(2x)$ kun je ook $\sin(4x)$, $\cos(4x)$ en $\tan(4x)$ uitdrukken in $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$.

Leid zelf zo eenvoudig mogelijke formules af.

## Testen

### Opgave 18

Gegeven zijn de functies $y_1 = \sin(2x) + \frac{1}{2}$, $y_2 = \sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y_3 = y_2 - y_1$. Neem voor al deze functies als domein $[-\pi, \pi]$.

**a** Toon aan dat de grafiek van $y_3$ een zuivere sinusoïde is.

**b** Bepaal algebraïsch alle toppen en nulpunten van $y_3$.

**c** Los algebraïsch op: $y_3 \geq 0$.

### Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. (Eventuele benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.)

**a** $\sin(x) = \cos(x)$

**b** $\sin(2x) = \cos(x)$

**c** $\cos^2(x) = \sin^2(x)$

**d** $\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.