1.1 Goniometrische functies

Inleiding

Muziek maak je door lucht in trilling te brengen. Dat doe je met een snaar, een holle buis, je stembanden, een trillend plaatje, e.d. Als je een snaar in trilling brengt hoor je behalve de grondtoon ook boventonen meeklinken. De frequenties van deze boventonen zijn een veelvoud van die van de grondtoon, maar ze klinken minder luid. Door de sinusoïden van de grondtoon en de boventonen op te tellen krijg je het trillingspatroon van de snaar.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip goniometrische functie en eigenschappen van dergelijke functies onderzoeken;
- de functie $f(x) = \tan(x)$ en zijn eigenschappen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = a$ of $\cos(x) = a$ oplossen;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaatsvindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld
$u(t) = a\sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$.
De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a. Neem voor het gemak $a = 1$. De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld) $u_1(t) = 0{,}8\sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$. Voor de tweede boventoon kan: $u_2(t) = 1{,}2\sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$. Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

a Breng eerst de grafiek van de grondtoon A maar eens in beeld met je grafische rekenmachine. Zorg dat je precies drie periodes in beeld krijgt.

b Zet de twee boventonen er bij en tel deze functies op.

c Is de resulterende snaartrilling een zuivere sinusoïde?

Uitleg 1

Je kent de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen al. Omdat in deze functies de goniometrische verhoudingen sinus en cosinus voorkomen zijn het voorbeelden van goniometrische functies. De belangrijkste eigenschap is wel hun periodiciteit. Maar wat als je $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$ gaat gebruiken om ingewikkelder functievoorschriften te maken? Bekijk eerst maar eens een paar grafieken:

- $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$
- $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- $y_5 = \sin\left(x^2\right)$
- $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

- $y_7 = \sin(2x) - \sin(x)$
- $y_8 = x + \sin(x)$

Je weet dat y_3 een zuivere sinusoïde is, dus daarbij is sprake van een periode (4π), een amplitude (2), een evenwichtsstand ($y = 1$) en een horizontale verschuiving (2 in de positieve x-richting). Ga dit na, eigenlijk moet je dit vooraf meteen kunnen zien.
Verder lijken ook y_4 en y_6 zuivere sinusoïden. Dat is ook inderdaad het geval, al kun je nu nog niet aantonen dat dit zo is. Je kunt wel periode, amplitude, evenwichtsstand en horizontale verschuiving uit de grafiek aflezen.
Van de overige functies is alleen y_7 periodiek, de andere twee niet.

Opgave 1

Gegeven is de goniometrische functie $f(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

a Breng de grafiek in beeld op de grafische rekenmachine. Waarom is het hierbij handig om vooraf in te zien dat het hier een sinusoïde betreft en de periode, de amplitude en de evenwichtsstand te bepalen?

b Welke horizontale verschuiving moet je op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Bereken de toppen van de grafiek van f op het interval $[0,12]$.

d Los op: $f(x) \leq 15$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Ga van elk van de volgende functies na of de grafiek op een sinusoïde lijkt of niet.

a $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x – 1)$

b $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$

c $y_5 = \sin\left(x^2\right)$

d $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

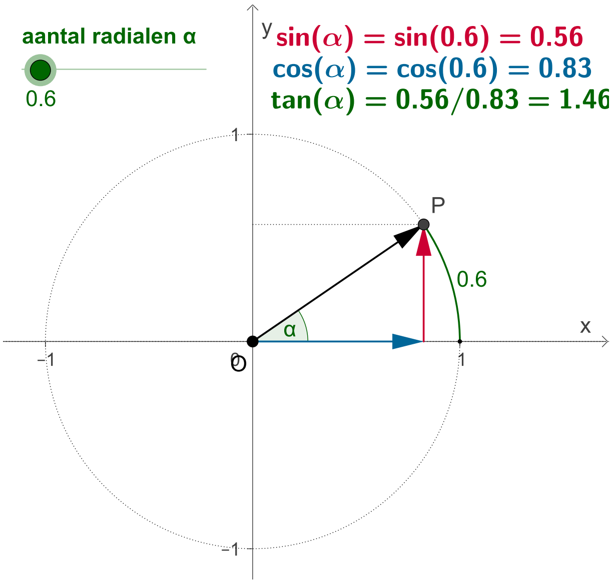
e $y_9 = \sin(9x) – \sin(11x)$

Opgave 3

Waarom weet je bij y_4 en y_6 in de vorige opgave eigenlijk (nog) niet zeker of hun grafieken echt dezelfde vorm hebben als die van $y = \sin(x)$?

Uitleg 2

Bekijk de applet: tangens



Figuur 2

In een eenheidscirkel kun je zo de tangens definiëren:

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En daarom geldt voor de tangensfunctie:

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$. De bijbehorende limieten zijn $\lim_{x \downarrow \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi} \tan(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi} \tan(x) = \infty$.

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2**. Bekijk de grafiek van $y = \tan(x)$ op je grafische rekenmachine.

a Breng die grafiek op je grafische rekenmachine zo in beeld, dat je precies twee periodes ziet.

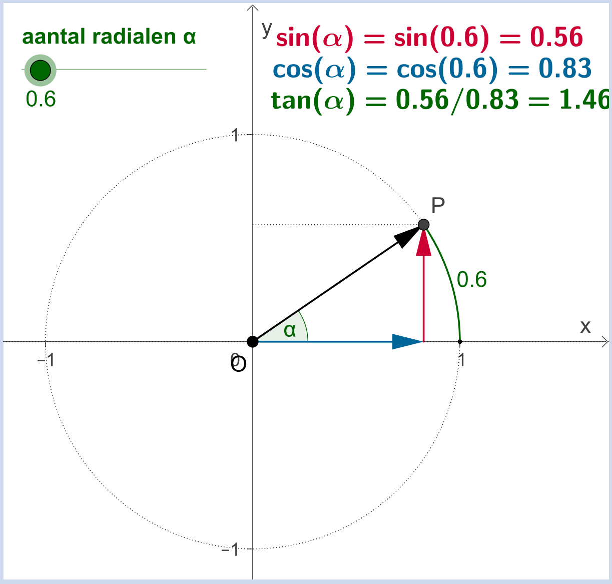
b Waar zitten de verticale asymptoten van deze functie? Leg ook uit hoe je dat kunt afleiden uit de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

c Voor welke waarden van x is $\tan(x) = 1$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet



Figuur 3

Onder **goniometrische functies** versta je functies waarin sin, cos (en tan) voorkomen.
De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al. De tangensfunctie is nieuw.
In deze eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens gedefinieerd als:

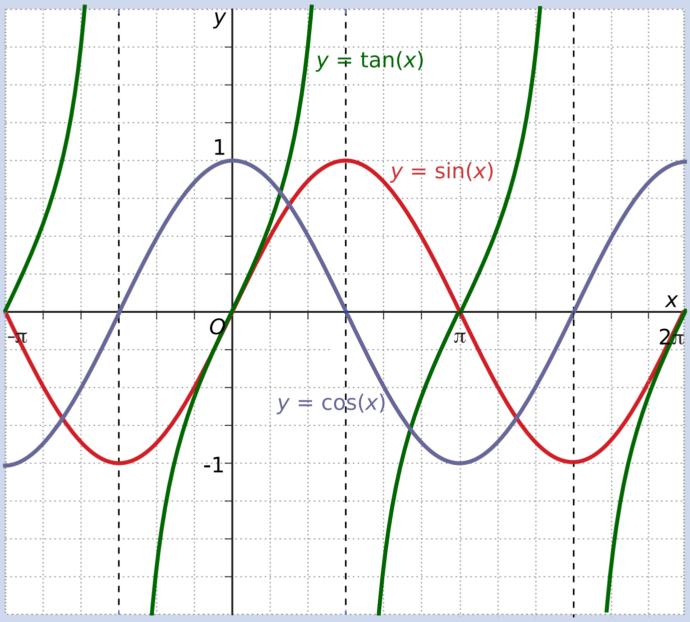
$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En dus geldt voor de **tangensfunctie**: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De bekende sinusoïden zijn goniometrische functies die zuiver periodiek zijn en een amplitude en een evenwichtsstand hebben. Maar dat geldt niet voor alle goniometrische functies. Hier zie je de drie basisfuncties. Door transformaties toe te passen krijg je:

Bekijk de applet



Figuur 4

$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet

$f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet

$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Voorbeeld 1

Los op $[-\pi,\pi]$ op: $\tan(x) \leq 1$.

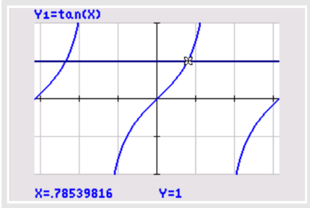
Antwoord

Maak eerst met je GR de grafiek van $y = \tan(x)$ op $[-\pi,\pi]$.

De verticale asymptoten vallen meteen op. Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vind je ze bij x-waarden waarvoor $\cos(x) = 0$. Dus: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Los nu op: $\tan(x) = 1$.

Omdat $\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$ en de tangensfunctie een periode van π heeft, wordt dit: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.



Figuur 5

Uit de grafiek lees je nu de oplossing af, rekening houdend met de verticale asymptoten:

$-\pi \leq x < -\frac{3}{4}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Los zelf op $[0,2\pi]$ op: $\tan(x) > \sqrt{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 10\sin(0{,}1\pi(x-5)) + 15$ op het interval $[0,50]$.

a Lees periode, amplitude, evenwichtsstand en de horizontale verschuiving t.o.v. de y-as uit het functievoorschrift af.

b Teken de grafiek met je grafische rekenmachine.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) = 12$.

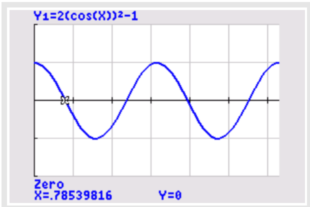
Voorbeeld 2

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
(Met $\cos^2(x)$ wordt $(\cos(x))^2$ bedoeld.)
Onderzoek of deze goniometrische functie periodiek is en bepaal dan de bijbehorende periode.

Antwoord

De standaard cosinusgrafiek heeft een periode van 2π. Het ligt dus voor de hand om de grafiek van f in beeld te brengen op bijvoorbeeld $[0,2\pi]$. Die grafiek lijkt op een zuivere sinusoïde met periode π, amplitude 1 en evenwichtsstand $y = 0$. Als je er een formule met cos bij wilt maken is de horizontale verschuiving 0. Kortom: de grafiek lijkt op die van $y = \cos(2x)$.

Of dit echt het geval is, kun je (nog) niet aantonen. Wel kun je de nulpunten berekenen en kijken of die hetzelfde zijn als die van $y = \cos(2x)$.



Figuur 6

$f(x) = 0$ als $2\cos^2(x) - 1 = 0$, dus als $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dit levert dezelfde waarden op als $\cos(2x) = 0$ oplossen.
Ga dat zelf na.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Breng zelf de grafiek van f op je grafische rekenmachine in beeld en bepaal de twee opeenvolgende maxima.

b Welke periode kun je hieruit afleiden voor de sinusoïde die lijkt te ontstaan?

c Welke andere formule zou je bij deze sinusoïde kunnen opstellen?

d Waarom weet je nog niet helemaal zeker dat de grafiek van f ook echt een sinusoïde is?

Opgave 8

Gegeven de functie f met $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ op $[0{,}2\pi]$.

a Maak de grafiek van f op je grafische rekenmachine.

b Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Zo ja, welke formule past er dan bij die sinusoïde?

c Los op: $f(x) = 0{,}5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

d Gebruik nu de formule van de sinusoïde die je bij b hebt gemaakt en los exact op: $y = 0{,}5$. Komen deze antwoorden overeen met die bij c?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2x\sin(x)$ op $[0{,}2\pi]$.

a Waarom kan hier geen sprake zijn van een sinusoïde?

b Is dit een periodieke functie?

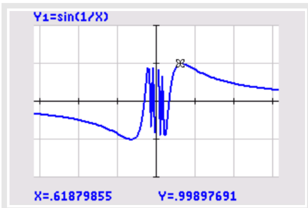
c Beschrijf de regelmaat van de grafiek van f.

Voorbeeld 3

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Is deze functie periodiek?
Bepaal de nulpunten en de asymptoten van deze functie.

Antwoord



Figuur 7

Omdat de standaard sinusfunctie een periode van 2π heeft en een vorm als $\frac{1}{x}$ juist voor $x = 0$ niet bestaat, bekijk je de grafiek op $[-\pi,\pi]$. Je krijgt dan op $[-\pi,\pi]\times[-2,2]$ deze grafiek. In de buurt van $x = 0$ is erg onduidelijk hoe de grafiek er uit ziet, inzoomen laat zien dat er steeds meer en steeds smallere ‘golfjes’ ontstaan als je dichter bij 0 komt. Periodiek is hij in ieder geval niet...

Nulwaarden: $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ geeft $\frac{1}{x} = 0 + k\cdot\pi$ en dus $x = \frac{1}{k\cdot\pi}$.

De positieve nulwaarden zijn $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}$, enz.

Deze komen steeds dichter bij 0 te liggen en ook steeds dichter bij elkaar.
Voor de negatieve nulwaarden geldt iets vergelijkbaars.

Er is bij $x = 0$ geen verticale asymptoot omdat een sinus altijd binnen $[-1,1]$ blijft.

Wel is er een horizontale asymptoot: als x heel groot (of heel groot negatief) wordt, dan nadert $\frac{1}{x}$ naar 0 en dus nadert ook $f(x)$ naar 0.
De horizontale asymptoot is $y = 0$.

Opgave 10

Bekijk eerst **Voorbeeld 3**. Je ziet daar een bijzondere functie die wel een sinus bevat maar niet periodiek is. Gegeven is de functie f met $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

a Maak de grafiek van f op $[0,1000]$.

b Los op: $f(x) = 1$.

c Hoe kun je aan de antwoorden bij b zien dat dit geen periodieke functie is?

Verwerken

Opgave 11

Als je de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(x)$ optelt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a Breng de grafiek in beeld op je grafische rekenmachine. Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Waarom mag je op grond hiervan nog niet aannemen dat het er ook werkelijk één is?

De grafiek van f is een sinusoïde.

b Geef de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y_1 = \sin(x)$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor deze sinusoïde.

d Bereken met behulp van je formule bij c de toppen en de nulpunten van de grafiek van f.

e Los op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > 1$.

Opgave 12

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

a Deze grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?

b Is de grafiek van g een sinusoïde?

c Bepaal met je grafische rekenmachine de nulpunten en de toppen van de functie g. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Opgave 13

De grafiek van de functie $y_2 = \sin^2(x)$ is een zuivere sinusoïde.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van de grafiek van $y = \cos(x)$.

b Geef een passende formule voor deze sinusoïde.

c Los op: $y_2 = 1$ door gebruik te maken van het oorspronkelijke functievoorschrift.

d Doe hetzelfde nog eens door gebruik te maken van de gevonden formule voor de sinusoïde.

Opgave 14

Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.

b Neem aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

c Los nu algebraïsch op: $f(x) < 0{,}5$.

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ met $[-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.

b De grafiek ziet er in de buurt van de oorsprong nogal merkwaardig uit. Waardoor wordt dit veroorzaakt?

c Welke waarde zou je f geven voor $x = 0$?

d Hoe ziet de grafiek er uit als je heel ver van de oorsprong verwijderd bent? Probeer dat je verklaren.

Toepassen

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaats vindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld
$u(t) = a \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$.
De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a. Neem voor het gemak $a = 1$. De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld) $u_1(t) = 0{,}8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$. Voor de tweede boventoon kan: $u_2(t) = 1{,}2 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$. Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

Opgave 16: De toon B

Voor de B geldt een frequentie van 495 Hz (reine stemming).

a Welke sinusoïde beschrijft de B als je ervan uitgaat dat de standaardamplitude 1 is?

Op een bepaald instrument trilt alleen de eerste boventoon voor 50% hoorbaar mee.

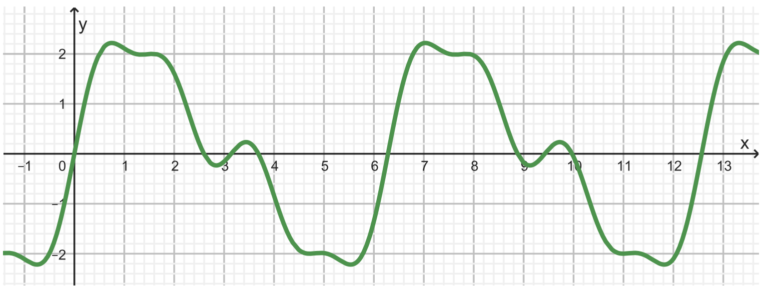
b Welke formule geldt voor deze eerste boventoon?

c De B en zijn eerste boventoon trillen tegelijk. Schrijf de bijbehorende formule op en breng de grafiek ervan in beeld (ongeveer drie periodes).

d Is deze gecombineerde trilling een sinusoïde?

Opgave 17: Sinusoïden stapelen

Deze grafiek is ontstaan door de grafieken van $y = 2\sin(x)$, $y = a\sin(2x)$ en $y = b\sin(4x)$ op te tellen.



Figuur 8

Zoek uit welke waarden a en b hebben.

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Geef een formule voor deze sinusoïde met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 19

De toppen van $y = \sin\left(x^2\right)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$ kun je met je grafische rekenmachine wel vinden. Je kunt ze ook algebraïsch bepalen. Laat zien hoe.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.