5.5 Integralen

Inleiding

Nu je exponentiële en logaritmische functies kunt differentiëren, kun je ook primitieven van dergelijke functies afleiden. Die heb je nodig om oppervlaktes onder vlakdelen, inhouden van omwentelingslichamen, lengtes van krommen, en dergelijke exact te kunnen berekenen als bij het beschrijven ervan exponentiële en/of logaritmische functies worden gebruikt.

Je leert in dit onderwerp

- de primitieven van exponentiële en logaritmische functies kennen;
- integralen berekenen waarin exponentiële en/of logaritmische functies voorkomen.

Voorkennis

- werken met exponentiële en logaritmische functies;
- differentiëren en integreren met alle basisregels;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

Verkennen

Opgave V1

Uit de afgeleiden van de exponentiële en de logaritmische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

a Welke primitieven kun je zelf verzinnen?

b Licht toe dat uit $f(x) = \frac{1}{x}$ volgt: $F(x) = \ln(|x|) + c$.
(Waarom die absoluutstrepen???)

Uitleg

Uit de afgeleiden van de exponentiële en de logaritmische functies kun je een hele lijst met primitieven samenstellen.

- Als $f(x) = \text{e}^x$ dan is $f'(x) = \text{e}^x$.
  Dus: als $f(x) = \text{e}^x$ dan is $F(x) = \text{e}^x + c$.
- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$.
  Dus: als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$.
- Als $f(x) = \ln(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{x}$ (met $x > 0$).
  Dus: als $f(x) = \frac{1}{x}$ (met $x > 0$) dan is $F(x) = \ln(x) + c$.
  Is echter $x < 0$ dan is $f(x) = \text{-}\frac{1}{\text{-}x}$.
  De primitieve is dan $F(x) = \text{-}\ln(\text{-}x) \cdot \text{-}1 + c = \ln(\text{-}x) + c$.
  Dit kun je samenvatten tot: als $f(x) = \frac{1}{x}$ dan is $F(x) = \ln(|x|) + c$.
  Hierin worden de haakjes van de ln-functie vaak weggelaten!

Moeilijker is het vinden van de primitieve van $f(x) = \ln(x)$.
Maar je kunt wel bewijzen dat $F(x) = x\ln(x) - x + c$ als afgeleide heeft: $F'(x) = \ln(x)$.
En dan heb je toch een geschikte primitieve gevonden.
Vervolgens is $f(x) = {}^g\log(x)$ ook niet moeilijk meer te primitiveren...

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Er worden primitieven bepaald van exponentiële en logaritmische functies.

a Als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$. Laat zien dat dit klopt door F te differentiëren.

b Leid de primitieve van $g(x) = \text{e}^x$ af uit die van $f(x) = g^x$.

Neem nu de functie $h(x) = 2 + 0{,}5\,\text{e}^{2x}$.

c Bereken $\int_0^2 h(x)\,\text{d}\,x$.

d Wat heb je met de integraal uit c uitgerekend?

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt verteld dat $F(x) = \ln|x| + c$ de primitieve is van $f(x) = \frac{1}{x}$.

a Laat met behulp van differentiëren zien dat dit juist is.

b Welke primitieve heeft $g(x) = \frac{4}{x+2}$?

c Welke primitieve heeft $h(x) = \frac{4}{2x+4}$?

Opgave 3

In de **Uitleg** wordt verteld dat $F(x) = x\ln(x) - x + c$ de primitieve is van $f(x) = \ln(x)$.

a Laat met behulp van differentiëren zien dat dit juist is.

b Welke primitieve heeft $f(x) = {}^g\log(x)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om te kunnen werken met integralen waarin exponentiële en logaritmische functies voorkomen heb je een lijst nodig met **primitieven van exponentiële en logaritmische functies**.

- Als $f(x) = \text{e}^x$ dan is $F(x) = \text{e}^x + c$.
- Als $f(x) = g^x$ dan is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$.
- Als $f(x) = \ln(x)$ dan is $F(x) = x\ln(x) - x + c$.

Verder is de lijst met **primitieven van machtsfuncties** nu ook compleet gemaakt.

- Als $f(x) = x^n$ dan is $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ mits $n \neq -1$.
- Als $f(x) = \frac{1}{x}$ dan is $F(x) = \ln|x| + c$.
  Je ziet dat de haakjes van de ln-functie zijn weggelaten!

Functies waarin de hierboven genoemde functies voorkomen kun je nu af en toe ook primitiveren. Maar omdat het aantal methoden dat je leert voor het primitiveren beperkt is, moet je bij het berekenen van een integraal nog regelmatig terugvallen op je grafische rekenmachine voor een benadering.

Voorbeeld 1

Primitiveer de volgende functies:

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 5^{2x}$
- $f(x) = {}^5\log(x)$
- $f(x) = \text{e}^{-0{,}5x}$
- $f(x) = \left(\text{e}^x + \frac{1}{\text{e}^x}\right)^2$

Antwoord

Hier zie je hoe het primitiveren in zijn werk gaat. Soms moet je eerst de functie herleiden.

- $f(x) = 5^x$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^x + c$.
- $f(x) = 5^{2x}$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^{2x} \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{1}{2\ln(5)} \cdot 5^x + c$.
- $f(x) = {}^5\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(5)} = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \ln(x)$ geeft $F(x) = \frac{1}{\ln(5)}(x\ln(x) - x) + c$.
- $f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$ geeft $F(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x} \cdot \frac{1}{-0{,}5} + c = -2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + c$.
- $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$ geeft $F(x) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{2x} + 2x - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-2x} + c$.

Opgave 4

Primitiveer de volgende functies, zie **Voorbeeld 1**.

a $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$

b $f(x) = 5 + 3 \cdot 2^{4x}$

c $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

d $f(x) = \frac{3}{2x+1}$

e $f(x) = \ln(3x)$

f $f(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^{4x}}$

Opgave 5

Bepaal de volgende integralen met behulp van primitiveren.

a $\int_0^2 \frac{3}{3x+4}\,\mathrm{d}x$

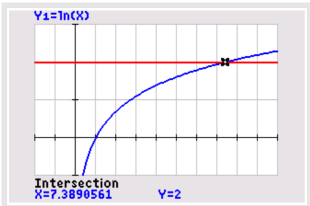
b $\int_0^4 0{,}5^{2x-1}\,\mathrm{d}x$

c $\int_1^2 \frac{x^4+5x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

d $\int_{0{,}25}^{\mathrm{e}} \ln(4x)\,\mathrm{d}x$

Voorbeeld 2

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen. Bereken de exacte oppervlakte A van V.



Figuur 1

Antwoord

De grafiek van f snijdt de x-as in $(1,0)$.
De grafiek van f snijdt de lijn $y = 2$ in $(\mathrm{e}^2, 2)$.

$$A(V) = \int_0^{\mathrm{e}^2} 2\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [2x]_0^{\mathrm{e}^2} - [x\ln(x) - x]_1^{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^2 - 1$$

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

a Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt.

Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen.

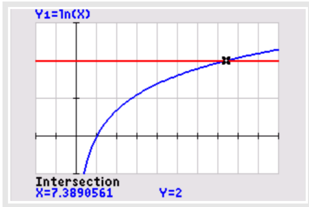
b Bereken de oppervlakte van vlakdeel V met behulp van primitiveren.

c Hoe komt het dat je antwoord bij b hetzelfde is als de oppervlakte die je in het voorbeeld hebt gevonden?

Voorbeeld 3

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen.

Vlakdeel V wordt gewenteld om de y-as. Bereken de exacte inhoud I van het omwentelingslichaam W dat zo ontstaat.



Figuur 2

Antwoord

Omdat voor de grafiek van f geldt $y = \ln(x)$, wordt $x = \mathrm{e}^y$.

$$I(W) = \int_0^2 \pi (\mathrm{e}^y)^2 \, \mathrm{d}\, y = \pi \int_0^2 \mathrm{e}^{2y} \, \mathrm{d}\, y = \pi \left[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}\pi(\mathrm{e}^4 - 1).$$

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

a Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt.

Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x-as.

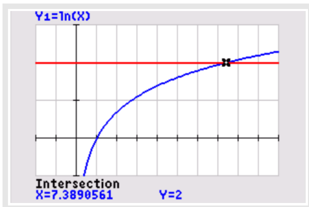
b Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam W_x dat daardoor ontstaat.

Vlakdeel V wordt gewenteld om de y-as.

c Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam W_y dat daardoor ontstaat.

Voorbeeld 4

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de lijn $y = 2$ en de beide coördinaatassen. Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 3

Antwoord

De gevraagde omtrek bestaat uit de lengtes van drie lijnstukken en de lengte van de grafiek van f tussen $x = 1$ en $x = \mathrm{e}^2$ samen.
Dus:

$$P(V) = 1 + 2 + \mathrm{e}^2 + \int_1^{\mathrm{e}^2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}\, x = 3 + \mathrm{e}^2 + \int_1^{\mathrm{e}^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, \mathrm{d}\, x \approx 17{,}18.$$

Opgave 8

Bestudeer **Voorbeeld 4**.

a Voer zelf de berekening in het voorbeeld uit. Ga na, dat je hetzelfde antwoord krijgt

Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $x = 2$ en de twee coördinaatassen.

b Bereken de omtrek van vlakdeel V met behulp van een integraal.

c Hoe komt het dat je antwoord bij b hetzelfde is als de omtrek die je in het voorbeeld hebt gevonden?

Opgave 9

Gegeven is de functie f door $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.

a Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V.

b Het vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as. Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

c Bereken met behulp van de grafische rekenmachine de omtrek van V.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende integralen exact en controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

a $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

b $\int_0^1 x^{2\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

c $\int_{0{,}25}^1 \ln(4x)\,\mathrm{d}x$

d $\int_1^4 \frac{x+4}{2x}\,\mathrm{d}x$

e $\int_0^1 2 + 5 \cdot 10^{0{,}5x}\,\mathrm{d}x$

f $\int_1^2 \log(3x)\,\mathrm{d}x$

Opgave 11

Bepaal de primitieve functie $F(x)$ als bekend is dat:

a $f(x) = -0{,}25\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}$ en $F(0) = 1$.

b $f(x) = 1 - \log(x)$ en $F(1) = 0$.

Opgave 12

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 4$.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

c V wordt gewenteld om de x-as. Bereken de exacte inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

a Laat zien dat $f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

b Bepaal de oppervlakte van het gebied tussen de x-as en de functie $g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ op het interval $[0,2]$.

Voor $a > 0$ is G_a het gebied ingesloten door de grafiek van g en de x-as op $[-a,a]$.

c Bereken de exacte waarde van a waarvoor de oppervlakte van G_a gelijk is aan 1.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f_p door $f_p(x) = px\,\mathrm{e}^{-x^2}$. V_p is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 2$.

a Toon aan dat $F(x) = -0{,}5p\,\mathrm{e}^{-x^2} + c$ de primitieve is van f.

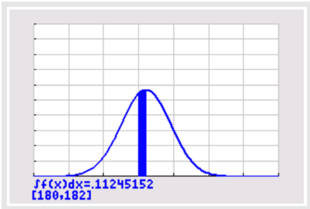
b Bereken de oppervlakte van V_1.

c Voor welke p is de oppervlakte van V_p gelijk aan 10?

Toepassen

De lengte x van bijvoorbeeld een grote groep mannen kent een bepaalde verdeling rond het gemiddelde. Die verdeling kan worden weergegeven door een kromme die een mooie klokvorm heeft. Dit heet een **normale verdeling** en voor de kromme geldt:

$$f(x) = \frac{1}{7 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-182}{7}\right)^2\right)}$$



Figuur 4

De precieze klokvorm bij de lengtes van deze groep mannen wordt hiermee bepaald door de getallen 182 (de gemiddelde lengte) en 7. Voor bijvoorbeeld een grote groep vrouwen zullen dit twee andere getallen zijn.

Het percentage mannen van deze groep waarvoor $180 \leq x \leq 182$ kun je berekenen door integreren.

Dit percentage p is $100 \cdot \int_{180}^{182} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Opgave 15

Bekijk de normale verdeling beschreven in **Toepassen**.

a Breng zelf de bij de formule horende kromme in beeld.

b Hoeveel procent van deze mannen heeft een lengte vanaf 180 cm tot en met 182 cm?

c Laat zien dat 100% van deze mannen een lengte tussen 150 cm en 220 cm heeft.

d Kun je dergelijke integralen berekenen door primitiveren?

Het percentage mannen met een lengte van 180 cm kun je niet berekenen met $100 \cdot \int_{180}^{180} f(x)\,\mathrm{d}x$.

e Waarom niet? En hoe kun je dit wel berekenen?

f Laat zien dat de helft van deze mannen kleiner is dan het gemiddelde.

Het getal 7 in de formule heet de standaardafwijking van de lengtes van deze grote groep mannen. Dit getal bepaalt de ‘breedte’ van de klokvorm.

g Laat zien dat vrijwel alle mannen lengtes hebben die vallen tussen $182 - 3 \cdot 7$ en $182 + 3 \cdot 7$.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende integralen met behulp van primitiveren.

a $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \mathrm{e}^x\right) \mathrm{d}x$

b $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$

c $\int_1^2 \frac{4}{2x+3} \mathrm{d}x$

d $\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$

e $\int_2^4 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x$

f $\int_0^2 2^{3x}\,\mathrm{d}x$

Opgave 17

Gegeven is $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 2x + 5$.

Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = 5 - 2x$, de x-as en de lijn $x = 6$.

Opgave 18

Gegeven is de functie f door $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Los op: $f(x) < 4$.

c Bereken exact de oppervlakte van V.

d Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat door V om de x-as te wentelen.